

社債オプションの評価法について

東京大学大学院経済学研究科 室井 芳史

平成 17 年 3 月 29 日

概要：近年、企業の企業倒産に対するリスクを社債などの金融商品の価格にどのように反映させるかについて大きな注目が集まるようになった。それに伴い、信用派生商品の評価法について数多くの議論がなされている。信用派生商品の評価法には、主に構造型アプローチと誘導型アプローチと呼ばれる二つの評価法が存在していることが知られている。古くから研究されてきた構造型アプローチは信用派生商品の価格形成の経済学的意味を明らかにできるという利点を持っている。その一方、この 10 年の間に特に研究が活発になっている誘導型アプローチと呼ばれる方法は、より柔軟に信用派生商品の評価が可能であるという利点を持っている。本原稿では社債オプションを例に取って誘導型アプローチを用いた信用派生商品の評価法について考察を行ないたいと思う。

キーワード:クレジット・リスク、社債、債券オプション、3 項分岐木

1 はじめに

本原稿では社債オプションを例に信用派生商品の評価について考察を行ないたいと思う。社債とは一般の企業の発行する債券のことであり、債券発行企業の倒産が起こると債権者に残存企業価値が分配される仕組みになっている。そのため、企業倒産が起こった場合でも債券のペイ・オフがなくなるわけではないが、額面全ての返済がなされることは一般に期待できない。そこで、どのように倒産のリスクをモデルに組み込むかは重要な問題になってくる。過去において社債や社債の派生商品の評価法としては構造型アプローチと誘導型アプローチの二つの方法が主に研究されてきた。構造型アプローチとは企業価値がある確率過程に従っているとした上で、企業価値がある閾値を下回った時点を企業の倒産時刻であるものとして派生商品価格を決定する方法である。この方法は数理ファイナンスの黎明期である 1970 年代より知られており、Merton (1973) や Longstaff and Schwartz (1992) 等の研究が有名である。この方法の利点としては倒産時刻の経済学的な意味合いが明らかになっているという特徴があげられる。その一方で、企業価値過程をモデリングすることから社債発行企業の財務内容がすべて明らかになっていなければ価格の計算ができないという欠点を持つ。更に、閾値の決め方に恣意性が残るなど実際の価格計算において、いくつかの問題が残るように感じられる。もう一つのモデルである誘導型アプローチは 1990 年代後半より発展した手法であり、倒産時刻をハザードレート過程で決定される可予測でない停止時刻に支配されていると仮定して商品の価格の計算を行なう方法である。誘導型アプローチは倒産の起こり方がブラックボックス化しているために経済的な意味合いが極めて乏しい反面、商品価格を計算するにあたって柔軟に対応できるという性質を持っている。つまり、ハザードレートを直接モデリングすることを軸に価格計算を行なうので格付けデータ等を用いる多くの商品の価格を

比較的簡便に計算できるという利点を持っている。誘導型アプローチの過去の先行研究は Duffie and Singleton (1999), Jarrow and Turnbull (1995) や Jarrow, Lando and Turnbull (1997) 等が挙げられる。また、邦文による信用派生商品の包括的な解説としては小田 (1999) や木島=小守林 (1999) が挙げることができる。

ところが、誘導型アプローチを用いた社債オプションの評価法の研究は過去において余り数多く行なわれてこなかったように感じられる。Jarrow and Turnbull (1995) ではハザード過程が一定の値を取る場合について社債オプションの価格が求められた。また、Jarrow, Lando and Turnbull (1997) では格付けモデルに拡張が行なわれた。Muroi (2004) ではアファイン構造モデルにおいて偏微分方程式を用いた社債オプションの評価法を考えた。また、Muroi (2002) では偏微分方程式を用いた社債アメリカ型オプションの定式化を行なった。更に、Muroi (2004) では Kunitomo and Takahashi (2001) や国友=高橋 (2003) で開発された手法である小分散漸近展開を用いて社債オプションの評価法が考察された。

本原稿の構成は以下のものである。次の第 2 章では Lando (1999) におけるブロック構築法 (building blocks methods) を用いることで信用派生商品の価格の計算が簡便に行なえることを解説する。また、この方法を用いることで社債や社債オプションがどのような形で定式化できるかについても議論を行ないたい。第 4 章では具体的に数値計算を行なう方法について議論を行ないたい。信用派生商品の価格の解析を最も簡便に行なう数値計算方法は 3 項分岐木を用いることであるものとする。そこで、この節ではまず Hull and White (1994a) による 3 項分岐木を用いた金利派生商品の価格計算法についての解説を行ないたいと思う。引き続いて、第 5 章では 4 節の拡張として 2 ファクター 3 項分岐木を用いた信用派生商品の価格計算法について議論を行ないたい。2 ファクター 3 項分岐木はもともと金利派生商品を計算するために Hull and White (1994b) により導入された方法である。3 項分岐木を用いた信用派生商品の価格計算法は例えば Schönbucher (2002/2003) 等で研究されたが、和文の解説は余り数多くは無いようである。第 4 章で 3 項分岐木を用いた金利派生商品の価格の導出法について考察をおこなった。第 5 節では、第 4 節の考え方を拡張した上で 3 項分岐木を用いた信用派生商品の価格の導出法について考察した。第 6 章で数値計算の結果を示し、第 7 章は本原稿の結論を述べたいと思う。

2 信用派生商品価格モデルの設定

本節では Lando (1999) を基礎に、信用派生商品の価格を計算する際に用いられるモデルを構築する。本節で議論されている内容の詳しい日本語による解説は例えば丸茂・家田 (2001) 等を参照にするとよい。誘導型アプローチは倒産時刻を点過程 $\{N_t\}$ の初めてジャンプする時間で定義される。それにより、企業の外の投資家が企業が突然倒産するの見えるという事をモデリングしているといえる。このようなモデリングは次の瞬間にどの程度倒産が起こるリスクがあるかのみ注目してモデリングされているので、倒産のおこる方法を直接的に言及したモデルにはなっていない。しかし、このような方法を用いるとモデルの構築が大幅に簡略化され商品の価格計算は容易に行なえるという利点がある。

まず、点過程の定義を与えたいと思う。確率過程 $\{N_t\}$ が強度関数 $\{l_t\}$ を持つ点過程であるとは次の二つの条件を満たすことである。ただし、 $\{l_t\}$ とは、非負の値を取る非確率的な関数である。

i) N_t は独立な増分を持つ確率過程

ii) $N_t - N_s$ は平均が $\int_s^t l_s ds$ であるポアソン分布に従う。すなわち、

$$P[N_t - N_s = k] = \frac{(\int_s^t l_s ds)^k}{k!} \exp\{-\int_s^t l_s ds\}$$

が成り立つ。誘導型アプローチではこのような点過程 $\{N_t\}$ の初めてのジャンプ時間を企業の倒産時刻としてモデリングする。いま、

$$\tau = \inf\{t : \int_0^t l_s ds \geq E\}$$

という停止時刻を考えれば、これは点過程 $\{N_t\}$ の初めてのジャンプ時間と同一の確率分布を持つ。そこで、停止時刻 τ を倒産時刻とみなして信用派生商品の価格の計算を行ないたい。ところがこの場合、強度過程が非確率的なモデルしか作ることができない。このことは、社債等の信用リスクを持つ商品の発行当該企業の未来の信用度が全て確定的な形で分かっていることを意味しており、不自然なモデルであるといえる。そこで決定的な強度関数 $\{l_t\}$ の代わりに確率的に変動する正の値のみを取る確率過程 $\{h_t\}$ を用いて倒産時刻を定義することを考える。そのために Cox 過程と呼ばれる確率過程を定義する。つまり上の N_t の定義において $\{l_t\}$ を確率的に変動する非負の値を取る確率過程 $\{h_t\}$ に置き換えて確率過程を定義した確率過程 $\{N_t\}$ を Cox 過程と呼ぶ。本原稿では Cox 過程がはじめてジャンプする時刻を倒産時刻と見なしてモデルを作りたい。そこで停止時刻 τ を

$$\tau = \inf\{t : \int_0^t h_s ds \geq E\},$$

で決めてやれば Cox 過程がはじめてジャンプする時刻と同一の分布を持っていることからこの停止時刻 τ を倒産時刻と見なして信用派生商品の価格を計算すればよいことが分かる。確率過程 $\{h_t\}$ の具体的な表現は 3 節で与えることにする。

現在市場では国債と社債二つの金融商品が取引されているものとする。いま確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) を固定しておく。この確率空間で短期金利の確率過程を $\{r_t\}$ 、倒産時刻のハザードの確率過程を $\{h_t\}$ としておく。この確率空間で時間によって発展する情報集合族

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_t &= \sigma\{r_s, h_s : 0 \leq s \leq t\} \\ \mathcal{H}_t &= \sigma\{1_{\{\tau \leq s\}} : 0 \leq s \leq t\} \\ \mathcal{F}_t &= \mathcal{G}_t \vee \mathcal{H}_t. \end{aligned}$$

を定義する。 \mathcal{G}_t は金利とハザードの情報 \mathcal{H}_t は倒産時刻に対する情報 \mathcal{F}_t は市場全体における情報に対する情報集合といえる。このとき Lando (1999) は次のような補題を導いた。

補題 2.1 次の 3 つの関係が成り立っているものとする。

$$\begin{aligned} E[\exp(-\int_t^u r_s ds) | X] &< \infty \\ E[\int_t^u |Y_s| \exp(-\int_t^s r_\xi d\xi) ds] &< \infty \\ E[\int_t^u |Z_s h_s| \exp(-\int_t^s r_\xi + h_\xi d\xi) ds] &< \infty \end{aligned}$$

このとき次のことが言える。

$$E[\exp(-\int_t^u r_s ds) X 1_{\{\tau > u\}} | \mathcal{F}_t] = 1_{\{\tau > t\}} E[\exp(-\int_t^u r_s + h_s ds) X | \mathcal{G}_t] \quad (1)$$

$$E[\int_t^u Y_s 1_{\{\tau > s\}} \exp(-\int_t^s r_\xi d\xi) ds | \mathcal{F}_t] = 1_{\{\tau > t\}} E[\int_t^T Y_s \exp(-\int_t^s r_\xi + h_\xi d\xi) ds | \mathcal{G}_t] \quad (2)$$

$$E[\exp(-\int_t^\tau r_s ds) Z_\tau | \mathcal{F}_t] = 1_{\{\tau > t\}} E[\int_t^u h_s Z_s \exp(-\int_t^s r_\xi + h_\xi d\xi) ds | \mathcal{G}_t] \quad (3)$$

第 (1) 式は満期までに倒産が起これなければペイオフ X 発生して、倒産があればペイオフがなくなるような商品の価格の計算法について書いたものである。第 (2) 式は倒産が起これない限り時刻 $s \in [0, T]$ において連続的なペイオフ $Y_s ds$ が発生するような商品の価格の計算法について書いたものである。第 (3) 式は倒産が時刻 $t \in [0, T]$ において起こった場合そのタイミングで Z_t が生じるような商品の価格の計算法について書いたものである。これらの各式では左右の式で使われている情報集合が \mathcal{F}_t から \mathcal{G}_t に書き換わっていることに注意を向けることは重要である。

社債価格のモデリングにおいて社債のペイオフのルールを確定しないといけない。いま、社債の額面を 1 に固定しておく。その上で次のような仮定を設ける。

仮定 2.1 もし、社債の満期 T より前に社債発行企業に倒産が起これなければ、満期に額面を満額受け取れることができる。もし、社債の満期 T より前に社債発行企業に倒産が起これば、満期に額面の δ 倍だけ受け取れることができる。

このような仮定は Jarrow and Turnbull (1995) で仮定されたもので RT リカバリールールと呼ばれることがある。この他にもいくつかのリカバリールールを用いたモデルが知られているがここでは RT リカバリールールの下で社債および社債オプション価格の計算を行なう。ここで、人工的で特殊な債券として $\delta = 0$ と固定した商品であるゼロリカバリー債を導入しておく。

本原稿ではリスク中立確率測度 P^* が存在するものと仮定をおく。そこで次の仮定を導入しておこう。

仮定 2.2 時刻 t における満期 T の国債およびゼロリカバリー債の価格過程を $p(t, T)$ および $w(t, T)$ と書くことにする。このとき割り引かれた国債価格過程および社債価格過程

$$\tilde{p}(t, u) = p(t, u)/B(t), \quad \tilde{w}(t, u) = w(t, u)/B(t)$$

が 2 乗可積分なマルチンゲールになるような確率測度 P^* が存在すると仮定する。

国債価格過程 $p(t, T)$ はリスク中立確率測度 P^* を用いると次のように書くことができる。

$$p(t, T) = E^*[\exp(-\int_t^T r_s ds) | \mathcal{G}_t],$$

また、ゼロリカバリー債の価格は

$$\begin{aligned} w(t, T) &= E^*[\exp(-\int_t^T r_s ds)(1 - N_T) | \mathcal{F}_t] \\ &= E^*[\exp(-\int_t^T r_s + h_s ds) | \mathcal{G}_t](1 - N_t). \end{aligned}$$

と書くことができる。市場に裁定取引機会が存在しなければ社債の価格 $v(t, T)$ は

$$v(t, T) = (1 - \delta)w(t, T) + \delta p(t, T) \quad (4)$$

と書くことができる。

3 社債のガウス型モデル

本節では確率過程 $\{r_t\}$ および $\{h_t\}$ に具体的な表現を与えることで社債の価格の計算を行ないたい。そこで、本節では $\{r_t\}$ および $\{h_t\}$ にガウス型モデルを導入したいと思う。このようなモデル

は金利過程 $\{r_t\}$ やハザード過程 $\{h_t\}$ が負の値をとる可能性を残し、厳密な意味では数学的に正当化することはできない。ところが計算や解析の簡便性から広く使われることのあるモデルである。このようなモデルを用いて信用派生商品の価格を計算した例としては例えば Kijima (1999) がクレジットスプレッドオプションの評価を行なった例が挙げられる。本節では Kijima (1999) を元に社債の評価法について考察をおこなう。なお、もっと一般的に多変量アファイン型モデルを用いたモデリングは Muroi (2004) で考察されている。金利の動きを表す確率過程が確率微分方程式

$$dr_t = (\phi_0(t) - a_0 r_t)dt + \sigma_0 dz_0(t) \quad (5)$$

を満たしているとする。ただし $\{z_0(t)\}$ は P^* 標準ウィナー過程とする。ここで、一旦短期金利が満たす確率微分方程式の形を (5) のように決めると、関数 $\phi_0(t)$ は初期時点の国債の期間構造により決定してしまう。つまり、初期時点での国債の期間構造に完全に一致するような $\phi_0(t)$ を決めることができることがこのモデルの利点である。このような確率微分方程式を短期金利として与え、金利派生商品の価格計算を行うことはよく行われている。このモデルは Hull=White モデルまたは拡張 Vasiceck モデルと呼ばれることが多い。

国債のフォワード過程を $f(t, T)$ と書くことにする。つまり時刻 t において

$$p(t, T) = \exp\left(-\int_t^T f(u, T)du\right)$$

となる関数 $f(t, T)$ を考える。ところで、関数 $f(0, t)$ を定めることと、国債の初期期間構造 $p(0, t)$ を定めることは同じ意味であることに注意しておこう。この時関数 $\phi_0(t)$ を

$$\phi_0(t) = a_0 f(0, t) + \frac{\partial}{\partial t} f(0, t) + \frac{\sigma_0^2}{2a_0}(1 - e^{-2a_0 t})$$

で定めれば確率微分方程式 (5) は初期時点における国債価格の期間構造と完全に一致するようにモデルを組む事ができる。また、ハザードの動きを表す確率過程は確率微分方程式

$$dh_t = (\phi_1(t) - a_1 h_t)dt + \sigma_1 dz_1(t) \quad (6)$$

を満たすものとする。関数 $\phi_1(t)$ については後で議論を行いたいと思う。ただし $z_0(t)$ および $z_1(t)$ はそれぞれ 1 次元 P^* 標準ウィナー過程であり、

$$dz_0(t)dz_1(t) = \rho dt$$

を満たしているものとする。関数 $\phi_1(t)$ は短期金利の確率過程とハザードの確率過程を (5) 式および (6) 式のような形であるものと仮定してしまうと $\phi_1(t)$ の関数形も決まってしまう。社債のフォワード過程を $f_1(t, T)$ とおこう。すなわち

$$v(t, T) = \exp\left(-\int_t^T f_1(u, T)du\right)$$

である。いま、関数 $g(t, T)$ を

$$g(t, T) = -\frac{\partial}{\partial T} \log \gamma(t, T)$$

ただし

$$\gamma(t, T) = \frac{1}{1 - \delta} \left(\frac{v(t, T)}{p(t, T)} - \delta \right)$$

である。すると、国債と社債の初期時点での期間構造に整合的であるためには関数 $\phi_1(t)$ は

$$\phi_1(t) = a_1 g(0, t) + \frac{\partial}{\partial t} g(0, t) + \frac{\sigma_1^2}{2a_1} (1 - e^{-2a_1 t}) + \rho \sigma_0 \sigma_1 \left(\frac{1 - e^{-a_0 t}}{a_0} + \frac{e^{-a_0 t} - e^{-(a_0 + a_1)t}}{a_1} \right)$$

と書くことができる。この式の証明は Kijima (1999) によって行われている。

これらの確率微分方程式を解くと、

$$\begin{aligned} r_{t+v} &= r_t e^{-a_0 v} + \int_t^{t+v} \phi_0(s) e^{-a_0(t+v-s)} ds + \sigma_0 \int_t^{t+v} e^{-a_0(t+v-s)} dz_0(s) \\ h_{t+v} &= h_t e^{-a_1 v} + \int_t^{t+v} \phi_1(s) e^{-a_1(t+v-s)} ds + \sigma_1 \int_t^{t+v} e^{-a_1(t+v-s)} dz_1(s) \end{aligned}$$

と計算できる。そこで関数 $R(t, T)$ と $H(t, T)$ を

$$R(t, T) = \int_t^T r_s ds, \quad H(t, T) = \int_t^T h_s ds$$

とおくと、

$$\begin{aligned} R(t, T) &= r_t B_0(t, T) + A_0(t, T) + \sigma_0 \int_t^T B_0(s, T) dz_0(s) \\ H(t, T) &= h_t B_1(t, T) + A_1(t, T) + \sigma_1 \int_t^T B_1(s, T) dz_1(s) \end{aligned}$$

と書ける。ここで $A_i(t, T)$ と $B_i(t, T)$ とは

$$A_i(t, T) = \int_t^T \phi_i(s) \frac{1 - e^{-a_i(T-s)}}{a_i} ds, \quad B_i(t, T) = \frac{1 - e^{-a_i(T-t)}}{a_i} \quad (i = 0, 1)$$

であるものとする。そこで新たに $R(t, T)$ と $H(t, T)$ を表現する関数として

$$\begin{aligned} \mu_0(t, T) &= E^*[R(t, T)|\mathcal{G}_t] = r_t \frac{1 - e^{-a_0(T-t)}}{a_0} + \int_t^T \phi_0(s) \frac{1 - e^{-a_0(T-s)}}{a_0} ds \\ \mu_1(t, T) &= E^*[H(t, T)|\mathcal{G}_t] = h_t \frac{1 - e^{-a_1(T-t)}}{a_1} + \int_t^T \phi_1(s) \frac{1 - e^{-a_1(T-s)}}{a_1} ds \\ S_0^2(t, T) &= Var^*[R(t, T)|\mathcal{G}_t] = \frac{\sigma_0^2}{a_0^2} \left[(T-t) - 2 \frac{1 - e^{-a_0(T-t)}}{a_0} + \frac{1 - e^{-2a_0(T-t)}}{2a_0} \right] \\ S_1^2(t, T) &= Var^*[H(t, T)|\mathcal{G}_t] = \frac{\sigma_1^2}{a_1^2} \left[(T-t) - 2 \frac{1 - e^{-a_1(T-t)}}{a_1} + \frac{1 - e^{-2a_1(T-t)}}{2a_1} \right] \end{aligned}$$

とおく。また、関数 $C(t, T)$ を

$$\begin{aligned} C(t, T) &= Cov^*[R(t, T), H(t, T)|\mathcal{G}_t] \\ &= \rho \frac{\sigma_0 \sigma_1}{a_0 a_1} \left[(T-t) - \frac{1 - e^{-a_0(T-t)}}{a_0} - \frac{1 - e^{-a_1(T-t)}}{a_1} + \frac{1 - e^{-(a_0 + a_1)(T-t)}}{(a_0 + a_1)} \right] \end{aligned}$$

で定義する。すると、 $R(t, T)$ の確率分布は平均 $\mu_0(t, T)$ 、分散 $S_0^2(t, T)$ の正規分布である。一方で $R(t, T) + H(t, T)$ の確率分布は平均 $\mu_0(t, T) + \mu_1(t, T)$ 、分散 $S_0^2(t, T) + S_1^2(t, T) + 2C(t, T)$ の正規分布である。いま、確率変数 X の確率分布が平均 μ 分散 σ^2 の正規分布であるとき確率変数 X の積率母関数は

$$E[e^{\theta X}] = \exp\left(\theta \mu + \frac{\theta^2 \sigma^2}{2}\right)$$

と書けることより、

$$p(t, T) = E^*[e^{-R(t, T)}] = \exp(-\mu_0(t, T) + \frac{1}{2}S_0^2(t, T))$$

$$\tilde{w}(t, T) = E^*[e^{-R(t, T) - H(t, T)}] = p(t, T) \exp(-\mu_1(t, T) + \frac{1}{2}S_1^2(t, T) + C(t, T))$$

と書けることが分かる。この結果から時刻 t において社債発行企業に倒産が起っていないならば社債の価格は

$$v(t, T) = p(t, T)(\delta + (1 - \delta) \exp(-\mu_1(t, T) + \frac{1}{2}S_1^2(t, T) + C(t, T)))$$

と書けることが分かった。

次に社債オプションについて考察を行いたいと思う。社債オプションとはオプションの満期 m において社債を価格 K で購入したり販売したりする権利である。オプションには満期までの好きな期日にいつでも行使できるアメリカ型と満期でしか行使できないヨーロッパ型の2種類のオプションが有名である。アメリカ型オプションに関しては最適停止問題と言う数学を用いて定式化する必要性があり、数理ファイナンスの難しい問題のひとつとして知られている。ここではオプションを以下のように数学的に定式化する。

定義 3.1 満期 m 行使価格 K の満期 T の割引社債を原資産とするヨーロッパ型コールオプションとは満期 m にペイオフ $(v(m, T) - K)^+$ を受け取ることが出来る商品であり、ヨーロッパ型プットオプションとは満期 m にペイオフ $(K - v(m, T))^+$ を受け取ることが出来る商品である。

定義 3.2 満期 m 行使価格 K の満期 T の割引社債を原資産とするアメリカ型コールオプションとは満期 m までの好きな時刻にペイオフ $(v(m, T) - K)^+$ を受け取ることが出来る商品であり、アメリカ型プットオプションとは満期 m までの好きな時刻にペイオフ $(K - v(m, T))^+$ を受け取ることができる商品である。

本原稿では信用リスクのヘッジと言う観点からプットオプションを中心に議論を行うが、コールオプションの価格の議論も本質的には同じである。社債オプション価格は

$$z = E^*[e^{-R(t, m)}(K - v(m, T))^+ | \mathcal{F}_t]$$

で与えられるのでこの期待値を計算することを考えればよい。このような期待値を偏微分方程式に直して計算する方法は Muroi (2004) で紹介されている。社債アメリカ型オプションの価格は

$$z = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{[t, m]}} E^*[e^{-R(t, \tau)}(K - v(\tau, T))^+ | \mathcal{F}_t]$$

で与えられる。ここで $\mathcal{T}_{[t, T]}$ とは $[t, T]$ に値をとる停止時刻全体の集合である。このような問題は Muroi(2004) において偏微分方程式を用いた定式化を行っている。一方、小分散漸近展開を用いたヨーロッパ型社債オプションの計算方法は Muroi (2004) で紹介されている。小分散漸近展開法を用いて価格計算をした場合、効率的に精度の良い価格の計算が可能なが知られている。また、Kijima (1999) においてはクレジット・スプレッドオプションの価格の考察を行っている。この商品は、クレジット・スプレッド

$$\Delta(t, T) = -\frac{1}{T - t} \log \frac{v(t, T)}{p(t, T)}$$

を原資産にするオプションであり、価格は

$$z = E^*[e^{-R(t, m)}(K - \Delta(m, T))^+ | \mathcal{F}_t]$$

で計算できる。このような商品の価格の解析については Kijima (1999) を参照すると良い。

4 三項分岐木による金利派生商品の数値計算法

本節では3項分岐木モデルを用いた信用派生商品の評価法について考えてみる。3項分岐木モデルは例えば Hull and White (1994a) により議論された方法であり、金利派生商品の数値的な評価においてよく用いられる手法である。このモデルにおいては各時点でのノードから次の時点のノードへ3方向に枝分かれした木を用いて確率微分方程式のパスの近似を行なう。それを行った上で、あるノードからどの方向にどれだけの確率で進むと考えれば確率微分方程式の解を近似できるのかを考える。次の時点のノードにおいてもさらに3方向に枝分かれした木を作っていくことで徐々に大きなモデルを構築していき、最終的には数値計算を行うのに十分な大きさのモデルを構築する。2ファクターの3項分岐木モデルを用いた金利派生商品の評価法は Hull and White (1994b) で議論されている。

ここでは(5)で与えられるように、短期金利の確率過程が確率微分方程式

$$dr_t = [\phi_0(t) - a_0 r_t]dt + \sigma_0 dz^0(t)$$

で与えられているとする。このとき、時刻 T においてペイオフ $G(r_T, T)$ が発生する金利派生商品の価格は

$$C = E^*[e^{-\int_0^T r_t dt} G(r_T, T)]$$

で与えられる。この期待値を数値的に計算することがここでの目標である。確率微分方程式(5)は線形方程式なので、新たに確率微分方程式

$$dx_t = -a_0 x_t dt + \sigma_0 dz^0(t) \tag{7}$$

を導入すると

$$r_t = x_t + \int_0^t \phi_0(t) dt$$

と書くことができる。確率過程 r_t を直接モデリングするのではなく x_t をモデリングすることで、上下対照な3項分岐木を構築することができるので、効率よく金利派生商品の価格付けが出来る。そこで、確率過程 x_t の三項分岐木の構築法を見ていきたいと思う。次の時点のノードと現時点のノードとを繋いでいくことによって確率微分方程式(7)と整合的なモデルを作成したい。まず、時間の刻み幅 Δt を決めておく必要がある。また、変数 x の刻み幅を $\Delta x = \sigma\sqrt{3\Delta t}$ で決めておく。変数 x に関する刻み幅をこのように取ることで精度の高い数値計算を行なうことができる事が知られている。現在、確率過程 x_t が時刻 $t = n\Delta t$ において $x = j\Delta x$ の値をとっているものとする。すると時刻 $t + \Delta t$ では $(j-1)\Delta x$ 、 $j\Delta x$ または $(j+1)\Delta x$ のいずれかの値をとるように確率微分方程式のパスを近似する。ところが、確率過程(7)は平均回帰性を持っているので j がある大きさより大きかったり小さかったりすると、このような木を作ると3項分岐木を用いて元の確率微分方程式を離散近似した確率過程がマイナスの確率で動く場合を考えないといけなくなり、整合的に金利派生商品の価格計算はできなくなる場合が出てくる。そこで j が十分大きい場合には次の時刻には $(j-2)\Delta x$ 、 $(j-1)\Delta x$ または $j\Delta x$ のノードへ、 j が十分小さければ $j\Delta x$ 、 $(j+1)\Delta x$ または $(j+2)\Delta x$ のノードへ動くように木を繋げていかなければならない。このような作業を続けていくと図1のような3項分岐木ができあがる。

----- 図1を挿入 -----

----- 図2を挿入 -----

確率過程 $x(t)$ が (n, j) 番目のノードにあるとは時刻 $n\Delta t$ に変数 x が $j\Delta x$ の状態にあるノードを指すものとする。各ノードは次の時点に向かって空間方向に連続した3つの点に分岐している。それを表現するために (a)、(b)、(c) のような木を用意する。 x^n で x_t を離散近似した確率過程の時刻 $t = n\Delta t$ における値を表現することにする。各ノードで x^n がどの方向にどの程度の確率で動くかを計算するためには、確率微分方程式 (7) と同じ大きさの平均と分散を持つように確率の計算を行なえばよい。確率過程 x^n がノード (n, i) にある場合に次のタイミングに上側、真ん中、下側のノードに動く確率を q_u 、 q_m および q_d と書くことにする。(a) のような木を作成した場合

$$\begin{aligned} E[x^{n+1} - x^n] &= \Delta x q_u + 0 q_m + (-\Delta x) q_d = -a x_j^n \Delta t \\ E[(x^{n+1} - x^n)^2] &= \Delta x^2 q_u + 0^2 q_m + (-\Delta x)^2 q_d = \sigma^2 \Delta t + a^2 (x_j^n)^2 \Delta t^2 \\ q_u + q_m + q_d &= 1 \end{aligned}$$

で q_u 、 q_m および q_d を計算できる。これを解くことで

$$\begin{aligned} q_u &= \frac{1}{6} + \frac{a^2 j^2 \Delta t^2 - a j \Delta t}{2} \\ q_m &= \frac{2}{3} + a^2 j^2 \Delta t^2 \\ q_d &= \frac{1}{6} + \frac{a^2 j^2 \Delta t^2 + a j \Delta t}{2} \end{aligned}$$

となる。これらの値が必ず正の値を取るには

$$-\frac{0.816}{a\Delta t} < j < \frac{0.816}{a\Delta t}$$

である必要性がある。もし、これらの条件が満たされないところで (a) の形に枝分かれした木を用いて数値計算をした場合には既に述べたように確率過程 x^n がマイナス確率や1より大きな確率で動くノードができる。そのような確率を用いて数値計算を行なって得られた値は不安定であることが知られているので注意が必要である。そこで、(b) や (c) のように枝分かれした木を用いて3項分岐木を作成することになる。(b) のように枝分かれしている場合は q_u 、 q_m および q_d

$$\begin{aligned} q_u &= \frac{1}{6} + \frac{a^2 j^2 \Delta t^2 + a j \Delta t}{2} \\ q_m &= -\frac{1}{3} - a^2 j^2 \Delta t^2 - 2a j \Delta t \\ q_d &= \frac{7}{6} + \frac{a^2 j^2 \Delta t^2 + 3a j \Delta t}{2} \end{aligned}$$

で与えられる。同じように (c) のように枝分かれしている場合は q_u 、 q_m および q_d は

$$\begin{aligned} q_u &= \frac{7}{6} + \frac{a^2 j^2 \Delta t^2 - 3a j \Delta t}{2} \\ q_m &= -\frac{1}{3} - a^2 j^2 \Delta t^2 - 2a j \Delta t \\ q_d &= \frac{1}{6} + \frac{a^2 j^2 \Delta t^2 - a j \Delta t}{2} \end{aligned}$$

で与えられる。(b) や (c) の形をした3項分岐木において q_u 、 q_m および q_d が全て正の値取るならば、それぞれ

$$\frac{0.184}{a\Delta t} < j < \frac{1.816}{a\Delta t}$$

および

$$-\frac{1.816}{a\Delta t} < j < -\frac{0.184}{a\Delta t}$$

でないとならないことが分かる。(a)の形の木と同様に、これらの範囲の外側で(b)や(c)の木を用いてはならない。次に、空間側のノードの最大値および最小値を決めよう。これらを j_{\max} および j_{\min} をおく。木の大きさをあまり大きくしないようにするために

$$j_{\max} \geq \frac{0.184}{a\Delta t}, \quad j_{\min} = -j_{\max}$$

を満たす最小の整数を j_{\max} に選ぶことが多いようである。この範囲で(a)、(b)、(c)の木を適切に繋ぎ合わせていけば確率微分方程式(7)に関する3項分岐木を構築することができる。

ここまでは、中央のノードが常に0になるような確率過程 $x(t)$ の3項分岐木を構築したので、各時点において各ノードを平行移動することで初期の金利の期間構造と整合的になるようにしよう。この操作を3項分岐木のフィッティングという。そこで、中央のノードをどれだけ上下に動かせばよいか考える。中央にないノードは中央のノードの動きと平行に上下に動かせばよい。時刻 t における中央のノードは x_t のノードから $\alpha(t)$ だけ移せばよいものとする。もし、国債の初期期間構造が完全に分かっていたら連続時間モデルにおいては $\alpha(t)$ は

$$\alpha(t) = f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-at})^2$$

とすれば初期期間構造と整合的な3項分岐木を構築することが出来る。ところが、3項分岐木の構築においては離散モデルを用いており、このような連続近似では完全に初期期間構造と3項分岐木をフィットさせることができない。そこで、完全にフィットさせるためにフォワードインダクションを用いたアルゴリズムが提案されている。まず、ノード (n, i) の状態価格を π_i^n と書くことにする。状態価格とは離散近似した金利過程 $\{r^m\}$ が時刻 $n\Delta t$ に (n, i) のノードに到達すればペイオフ1が、それ以外ではペイオフは発生しないような仮想的な商品の現在価格のことであり、

$$\pi_i^n = E^* [1_{r^n=r_i^n} \prod_{m=0}^{n-1} e^{-r^m \Delta t}]$$

と書ける。ただし、 r_i^n は r_t の確率過程の3項分岐木の (n, i) ノードであり、

$$r_i^n = \alpha_n + i \times \Delta x$$

である。つまり、 π_i^n は (n, i) にヒットする確率を金利 $\{r^m\}$ が途中で取る値を用いて割引いた値のことであり、確率過程 $\{r^m\}$ が (n, i) ノードに達するれば支払いが1が発生し、それ以外の場合が起こっても支払いはない商品の価格である。そこで、 $\alpha(t)$ をフォワードインダクションを用いて計算する。フォワードインダクションのアルゴリズムは次のように書ける。

(1) 時刻0では $(0, 0)$ の状態価格は1に等しく ($\pi_0^0 = 1$)、 α_0 は次のように決める。

$$\alpha_0 = -\frac{1}{\Delta t} \log(p(0, \Delta t))$$

(2) 現在、時刻 $n\Delta t$ にまでの α_m と π_j^m ($m \leq n$ および 全ての j) を知っているものとする。すると、時刻 n におけるレベル $j+1$ のノードの状態価格は

$$\pi_j^{n+1} = \sum_k q_{kj}^n \pi_k^n e^{-r_k^n \Delta t}$$

で書くことができる。ここで和記号 \sum_j は $(n+1, j)$ がつながっている全ての $n\Delta t$ におけるノードについて和を取っている。また、 q_{kj}^n は (n, k) ノードから $(n+1, j)$ ノードに移る推移確率を表すことにする。すると、満期 $(n+1)\Delta t$ の国債の価格は

$$p(0, (n+1)\Delta t) = \sum_j \pi_j^n e^{-r_j^n \Delta t} = \sum_j \pi_j^n e^{-x_j^n \Delta t} e^{-\alpha_n \Delta t}$$

であることに注目して α_n について解いてやると

$$\alpha_n = \frac{\log \sum_k \pi_k^n e^{-x_k^n \Delta t} - \log p(0, (n+1)\Delta t)}{\Delta t}$$

が求まる。これを帰納的に繰り返せば金利の期間構造と一致した3項分岐木を構築することができる。

一旦、金利派生商品の3項分岐木を構築すればこの木を用いてバックワードインダクションを行えば金利派生商品の価格を計算することが出来る。例えば、国債オプションの評価法について考えてみよう。オプションの満期におけるノードにはあらかじめ各ノードにおけるオプションのペイオフを計算しておく。例えばプットオプションならば

$$(\text{ペイ} \cdot \text{オフ}) = (K - p(m, T))^+$$

となるが、満期時刻において各ノードでの金利水準 r は分かっていることに注意しよう。国債価格 $p(m, T)$ は関数形が既に前節で計算されているので、その式を用いればペイオフは計算が可能である。次に満期の一時点前のノードにおけるオプションの価格を計算する。満期の一時点前のノードを一つ適当に選ぶ。そこから3方向に分岐している各々の枝の確率と各枝の先にあるノードの価格を掛け合わせる。これにより得られる、3つの価格をたし合わせ、 (n, i) における金利 r_n^i を用いて $e^{-r_n^i \Delta t}$ で割り引く。この操作を全ての満期の一時点前のノードに関して行う。更に一つ前のノードに関して計算を行い、最終的には時刻0のノードの値が求まるまで計算を行う。すなわち1ステップバックワードインダクションを行うには (n, i) における金利派生商品価格を $C(n, i)$ とすれば

$$C(n, i) = e^{-r_n^i \Delta t} \sum_j C(n+1, j) q_{ij}^{n+1}$$

を計算すればよい。ただし、和記号は全ての i と繋がる3項分岐木の枝について和を取っているものとする。

5 三項分岐木による信用派生商品の数値計算法

本節では、3項分岐木を用いた信用派生商品の価格導出法について考えたい。2ファクターの3項分岐木モデルを用いた信用派生商品の評価法は Schönbucher (2002/2003) で議論されており、デフォルトスワップの評価法等の数値例が述べられている。また、Muroi (2002) においては、数値計算の章においてアメリカ型社債オプションの価格を1ファクターの3項分岐木モデルを用いて計算を行っている。はじめに金利の動き方とハザードの動き方には相関がない ($\rho = 0$) 場合についてモデリングを行う。いま回収率 δ は既知であるものとする、

$$w(0, T) = \frac{1}{1 - \delta} (v(0, T) - \delta p(0, T))$$

である。ただし、 $w(0, T)$ は金利過程とハザード過程が無相関であることから

$$w(0, T) = E^*[\exp(-\int_0^T r_s + h_s ds)] = E^*[\exp(-\int_0^T r_s ds)]E^*[\exp(-\int_0^T h_s ds)]$$

である。また、 $p(0, T) = E^*[\exp(-\int_0^T r_s ds)]$ は国債価格に等しく、時刻 0 においてデータとしてあらかじめ与えられていることに注意しよう。よって、

$$w^*(0, T) = E^*[\exp(-\int_0^T h_s ds)]$$

はあらかじめ計算しておくことが可能であり、 $w^*(0, T)$ にフィットするようなハザード過程の 3 項分岐木を金利派生商品の場合と同じように構築する。式の形が国債の価格式と同じ形をしていることから、短期金利の 3 項分岐木と全く同一の方法でハザードの 3 項分岐木を構築することができる。そこで (6) で導入された確率微分方程式で記述されたハザード過程

$$dh_t = (\phi_1(t) - a_1 h_t)dt + \sigma_1 dz_1(t)$$

を考える。ここで、金利過程において離散近似した確率過程 $\{r^n\}$ を導入したのと同じように、確率過程 $\{h_t\}$ を 3 項分岐木上を動くように離散近似した確率過程 $\{h^n\}$ を導入する。また、確率微分方程式

$$dy_t = -a_1 y_t dt + \sigma_1 dz_1(t)$$

を考える。3 項分岐木上を動くこの確率過程 $\{y_t\}$ を離散近似した確率過程を $\{y^n\}$ とおく。また、ハザード過程のフィッティングを行なった際に、各時点 $n\Delta t$ で平行移動を行なった大きさを β_n と書くことにしておく。

2 次元確率過程 (r_t, h_t) の 3 項分岐木を考える。この 3 項分岐木は単純に r_t と h_t の 3 項分岐木を組み合わせで作ったものである。時刻 $n\Delta t$ において r_t の三項分岐木として見れば (n, i) のノード、 h_t の三項分岐木として見れば (n, j) のノードにあるノードのことを (n, i, j) と書くことにする。つまり (n, i, j) のノードとは時刻 $n\Delta t$ において

$$(\alpha_n + i\Delta x, \beta_n + j\Delta y)$$

にある状態のことである。ハザードの 3 項分岐木を作成する際に、次のステップでハザード過程を離散近似した確率過程 $\{h^n\}$ が上側のノードへ移る確率を q'_u 、真ん中のノードへ移る確率を q'_m 、下側のノードへ移る確率を q'_d と書くことにする。今回のモデルでは企業倒産が一旦発生すれば、2 度と企業倒産は起こらない。そこで、企業倒産が起こった後は信用リスクは含まないので金利派生商品の場合と同一の 3 項分岐木を用いればよいことが分かる。時刻 $n\Delta t$ において社債発行企業が時刻 t において既に倒産していたとする。このときに金利の三項分岐木上で金利が (n, i) のノードにある状態を示すノードを改めて (n, i) ノードと定義する。また倒産前の 3 項分岐木の作成に当っては、各時点において金利とハザードの大きさ 2 方向に次元を持った大きな物を考えればよい。このノードからはあわせて 12 方向に木が分岐している。つまり、 (n, i, j) のノードでは i や j が極端に大きかったり小さかったりしない場合は倒産前の 3 項分岐木上の $(n+1, i+1, j+1)$ 、 $(n+1, i+1, j)$ 、 $(n+1, i+1, j-1)$ 、 $(n+1, i, j+1)$ 、 $(n+1, i, j)$ 、 $(n+1, i, j-1)$ 、 $(n+1, i-1, j+1)$ 、 $(n+1, i-1, j)$ 、 $(n+1, i-1, j-1)$ のノードと倒産後の三項分岐木上のノード $(n+1, i+1)$ 、 $(n+1, i)$ 、 $(n+1, i-1)$ の計 12 カ所のノードと繋がっていることになる。時刻 $n\Delta t$ において確率過程 (r^n, h^n) が倒産前の 3 項分岐木のノード (n, i, j) にあるものとする。この時次のタイムステップに企業倒産のあった場合のノードへ動く確率を求めたい。 $\lambda = h_j^n$ とおく。微小時間 Δt の

間にハザード過程は近似的に一定の大きさしか取らないものとする、この時間内に倒産が起こる確率は $q = 1 - e^{-\lambda \Delta t}$ で近似できる。このノードのどの方向に動くかは (n, i, j) 時点での金利の動く確率に従って比例配分させる。残りの9方向へは確率 $1 - q$ で動く。企業倒産が起きなければ金利およびハザードがどの方向に動くかは、企業倒産しない確率 $1 - q$ を表1の大きさを比例配分して決めることになる。このようにして、2段重ねになった3項分岐木が構築できた。この3項分岐木を用いてバックワードインダクションを実行して信用派生商品の価格の計算を行う。 $C(n; i, j)$ で時刻 $n\Delta t$ において確率過程 (r^n, h^n) が (n, i, j) ノードにある場合の信用派生商品の価格を表すものとする。満期のノードにペイオフの大きさをあらかじめ計算して振付けておく。金利派生商品の場合と同じく満期時刻から1ステップずつ前のノードにおける信用派生商品の価格を計算していく。いま、時刻 $(n+1)\Delta t$ での各ノードでの商品の価格まで計算されているものとする。そのとき、確率過程 (r^n, h^n) がノード (n, i, j) 上にあった場合の価格は

$$C(n; i, j) = e^{-r_i^n \Delta t} (1 - e^{-h_j^n \Delta t}) \sum_{k, l} C(n+1; k, l) q_{(i, j)(k, l)}^n + e^{-(r_i^n + h_j^n) \Delta t} \sum_{k, l} C(n+1; k) q_{(i, j)(k)}^n$$

と書くことができる。ただし、 $C(n; k)$ は倒産後の時刻 $n\Delta t$ において金利水準が (n, i) で定められる位置にあった場合の派生商品の価格で、金利派生商品の価格の計算法と全く同じように計算ができる。1つ目の和記号はノード (n, i, j) と繋がる倒産前の状態にある9つのノード全てで取られており、確率 $q_{(i, j)(k, l)}^n$ は (n, i, j) ノードから $(n+1, k, l)$ ノードに移る確率である。2つ目の和記号もノード (n, i, j) と繋がる倒産後の状態にある3つのノード全てで取られており、確率 $q_{(i, j)(k)}^n$ は (n, i, j) ノードから倒産後の $(n+1, k)$ ノードに移る確率である。これを満期から繰り返していくことで時刻0における商品の価格を計算することができる。

次に、相関が0でない場合 ($\rho \neq 0$) の信用派生商品の価格付け法について考えよう。基本的には相関が0の時と価格の計算法は同じである。ただし、倒産前の各ノードから枝分かれする木に割り付けられた確率の大きさと、ハザードの3項分岐木の初期期間構造へのフィッティング方法で相関が0であるかないかの差が出てくる。まずパラメータ ϵ を

$$\epsilon = \frac{\rho}{36} (\rho > 0), = -\frac{\rho}{36} (\rho < 0)$$

で定義しておく。金利とハザードがどの程度の確率でどの方向に動くかは相関が0の場合は表1のように決めただ、今回は相関が正の値を取るか負の値をとるかにより表2、表3のように決めないといけない。

最後に、ハザードの初期期間構造へのフィッティング法について考察を行う。これを行うにあたっては、ハザード過程 h_t を

$$w(0, T) = \frac{1}{1 - \delta} (v(0, T) - \delta p(0, T)) = E^*[\exp(-\int_0^T r_s + h_s ds)]$$

へ直接フィッティングを行なうことになる。ここで、既に金利過程の方は初期期間構造へのフィッティングを終えているものとする。中心が0の3項分岐木から $\bar{\beta}_n$ だけ3項分岐木の中心線を移動して $\{h^n\}$ の3項分岐木を構築するものとする。

(1) 時刻0では $(0, 0, 0)$ の状態価格は1に等しく ($\pi_{00}^0 = 1$)、 $\bar{\beta}_0$ は次のように決める。

$$\bar{\beta}_0 = -\frac{1}{\Delta t} \log\left(\frac{w(0, \Delta t)}{p(0, \Delta t)}\right)$$

表 1: 各枝の確率 (金利とハザードが独立の場合)

	金利の動き			周辺確率
	下側	真ん中	上側	
ハザードの動き				
上	$q'_u q_d$	$q'_u q_m$	$q'_u q_u$	q'_u
真ん中	$q'_m q_d$	$q'_m q_m$	$q'_m q_u$	q'_m
下側	$q'_d q_d$	$q'_d q_m$	$q'_d q_u$	q'_d
周辺確率	q_u	q_m	q_d	1

この表は金利水準 r およびハザードの水準 h が独立に動くときの各枝の確率を表現している。ただし、次のステップの間に企業倒産が起こる確率は加味されていないのでその分の修正は必要である。具体的には倒産確率 $(1 - q) \times \Delta t$ をかけてやる必要がある。

表 2: 各枝の確率 (金利とハザードが正の相関を持つ場合)

	金利の動き			周辺確率
	下側	真ん中	上側	
ハザードの動き				
上	$q'_u q_d - \epsilon$	$q'_u q_m - 4\epsilon$	$q'_u q_u + 5\epsilon$	q'_u
真ん中	$q'_m q_d - 4\epsilon$	$q'_m q_m + 8\epsilon$	$q'_m q_u - 4\epsilon$	q'_m
下側	$q'_d q_d + 5\epsilon$	$q'_d q_m - 4\epsilon$	$q'_d q_u - \epsilon$	q'_d
周辺確率	q_u	q_m	q_d	1

この表は金利水準 r およびハザードの水準 h が正の相関を持って動くときの各枝の確率を表現している。ここで $\epsilon = \rho/36$ である。ただし、次のステップの間に企業倒産が起こる確率は加味されていないのでその分の修正は必要である。具体的には倒産確率 $(1 - q) \times \Delta t$ をかけてやる必要がある。

表 3: 各枝の確率 (金利とハザードが負の相関を持つ場合)

	金利の動き			周辺確率
	下側	真ん中	上側	
ハザードの動き				
上	$q'_u q_d + 5\epsilon$	$q'_u q_m - 4\epsilon$	$q'_u q_u - \epsilon$	q'_u
真ん中	$q'_m q_d - 4\epsilon$	$q'_m q_m + 8\epsilon$	$q'_m q_u - 4\epsilon$	q'_m
下側	$q'_d q_d - \epsilon$	$q'_d q_m - 4\epsilon$	$q'_d q_u + 5\epsilon$	q'_d
周辺確率	q_u	q_m	q_d	1

この表は金利水準 r およびハザードの水準 h が負の相関を持って動くときの各枝の確率を表現している。ここで $\epsilon = \rho/36$ である。ただし、次のステップの間に企業倒産が起こる確率は加味されていないのでその分の修正は必要である。具体的には倒産確率 $(1 - q) \times \Delta t$ をかけてやる必要がある。

(2) 現在、時刻 $n\Delta t$ にまでの $\bar{\beta}_m$ と π_{ij}^m ($m \leq n$ および 全ての j) を知っているものとする。すると、 (n, i, j) のノードの状態価格は

$$\pi_{ij}^{n+1} = \sum_{(k,l)} q_{(kl)(ij)}^n \pi_{kl}^n e^{-(r_k^n + h_l^n)\Delta t}$$

と計算することができる。ここで和記号 $\sum_{(k,l)}$ は $(n+1, k, l)$ がつながっている全ての $n\Delta t$ におけるノードについて和を取っている。また、 $q_{(kl)(ij)}^n$ は (n, k, l) ノードから $(n+1, i, j)$ ノードに移る推移確率を表す。すると、

$$\begin{aligned} w(0, (n+1)\Delta t) &= \sum_{kl} \pi_{kl}^n e^{-(r_k^n + h_l^n)\Delta t} \\ &= \sum_{kl} \pi_{kl}^n e^{-(r_k^n + y_l^n)\Delta t} e^{-\bar{\beta}_n \Delta t} \end{aligned}$$

であることに注目して $\bar{\beta}_n$ について解いてやると

$$\bar{\beta}_n = \frac{\log \sum_{k,l} \pi_{kl}^n e^{-(r_k^n + y_l^n)\Delta t} - \log w(0, (n+1)\Delta t)}{\Delta t}$$

と計算してやれば $\bar{\beta}_{n+1}$ が求まる。これを帰納的に繰り返せば金利の期間構造と一致した 3 項分岐木を構築することができる。あとは相関係数 ρ が 0 だった場合と同じく

$$C(n; i, j) = e^{-r_i^n \Delta t} (1 - e^{-h_j^n \Delta t}) \sum_{k,l} C(n+1; k, l) q_{(i,j)(k,l)}^n + e^{-(r_i^n + h_j^n)\Delta t} \sum_{k,l} C(n+1; k) q_{(i,j)(k)}^n$$

を用いてバックワードインダクションを用いて信用派生商品の価格を計算することができる。

6 数値計算結果

本節では前節で議論した 3 項分岐木アプローチによる社債オプションの評価法の数値計算の結果について述べたいと思う。ここでは、相関係数 ρ およびリカバリーレート δ を変化させて社債オプションの価格がどのように変化するかについて考察を行いたい。まず、国債と社債の初期期間構造を与える。この節で行われている国債と社債の初期時点におけるフォワードレートは一定であるものとする。今回の数値例では

$$f(0, t)(= f) = 0.05 \quad f_1(0, t)(= f_1) = 0.07$$

で与えられるものとする。すると時刻 0 での国債と社債の価格は

$$p(0, t) = e^{-ft} \quad v(0, t) = e^{-f_1 t}$$

で与えられることになる。このとき

$$g(0, t) = \frac{-(f_1 - f)e^{-(f_1 - f)t}}{e^{-(f_1 - f)t} - \delta}$$

と書くことができることが分かるので、ハザード過程の平均回帰レベル関数 $\phi_1(t)$ を計算することができる。この値を用いれば社債価格の解析表現を導くことができる。今回の数値計算例ではこの解析表現を使って 3 項分岐木の満期におけるペイ・オフの価格をあらかじめ計算しておく必要性

がある。ここでの数値計算例において国債と社債の初期期間構造を与えても特定化できないパラメーターは金利とハザードの確率微分方程式中の a_0 と a_1 、ボラティリティ σ_0 と σ_1 、相関係数 ρ とリカバリー・レート δ である。今回の数値例では a_0 と a_1 を $a_0 = 0.2$ および $a_1 = 0.1$ で与えるものとする。また金利とハザードのボラティリティの水準 σ_r と σ_h は $\sigma_r = 0.02$ および $\sigma_h = 0.01$ であるものとしておく

ここで考察する商品は満期 5 年の社債を原資産とするオプションであり、満期は 1 年で行使価格は 0.9 であるものとする。この場合についてヨーロッパ型の商品の価格を計算したいと思う。リカバリー・レートを 0.5 で固定した上で相関係数 ρ を -1 から 1 まで大きくしていくと図 3 のような形になる。また、相関係数 ρ を -0.6 に固定した上でリカバリー・レート δ を 0.2 から 0.8 まで動かすとプットオプションの価格は図 4 のような形状になることが分かる。数値計算の結果によると相関係数 ρ を大きくすると、右上がりの形状になることが多いようである。これは、相関係数が負である場合は金利のリスクとハザードのリスクが打ち消されることにより社債の価格が高くなりやすいことによるものと思われる。ただし、ハザードの平均回帰関数 $\phi_1(t)$ やツリーの形状が複雑であるために必ず右上がりになるということではないようである。また、リカバリー・レートが小さい時は社債価格は小さくなりプットオプションの価格は大きくなるが多いようである。また、オプション価格を金利とハザードのボラティリティの関数として見たときの価格を計算していくと価格関数は図 5 のような形状であることが分かった。

----- 図 3 を挿入 -----

----- 図 4 を挿入 -----

----- 図 5 を挿入 -----

7 結び

本研究では金利およびハザード過程がガウス過程であるという仮定の下で社債および社債オプション価格の計算法について考察を行った。特に社債ヨーロッパ型オプションの 3 項分岐木を用いた数値計算法についても後半で解説を行った。その上でいくつかの数値実験例を挙げて見た。一方で本研究では経路依存型のオプションの価格計算法は考察されていない。これらの問題はより数値計算が難しいことが予想され将来の発展が望まれるものと考えている。本原稿では社債オプションに絞って数値例を与えたが、社債オプションのほかにも 3 節で軽く触れた、クレジット・スプレッドオプションの評価等も 3 項分岐木を用いて評価が可能である。最後に 3 項分岐木を用いた社債オプション以外の信用派生商品の評価可能性や、他のモデルへの拡張可能性について極めて簡単に述べておきたいと思う。

(1) クレジット・デフォルト・スワップ

クレジット・デフォルト・スワップは社債等の信用リスクを含む商品が、社債発行企業の企業倒産等によるクレジットイベントが発生した場合にその損失額を取引相手から受け取る権利のことであり、一種の保険のように機能する商品であるものと考えればよい。このような権利を受け取る代わりに、取引相手に一定のプレミアムの支払いを行わないといけない。このような商品の価格計算は既に構築を行なった 3 項分岐木を若干の修正を加えた上で価格計算することが可能である。このような商品の解説は楠岡・青沼・中川 (2001) 等を参照するとよい。また、このような商品ではプレミアム支払い側がスワップ契約をキャンセルできるコーラブル型の物も計算するこ

とが可能である。

(2) クレジット・バスケット・スワップ

クレジットバスケットスワップとは複数の信用リスクを含む社債等の商品のクレジットイベントによる損失額を取引相手から請求することができる権利のことである。特に一番初めのクレジットイベントによる損失のみに注目する物を First-to-default swap という。このような商品の価格計算を行なう場合 2 ファクター以上のハザード・レートを考慮に入れなければ価格計算ができない。この場合、社債の初期期間構造にフィットするような平均回帰関数の導出は相当面倒であることが予想される。また、高次元の 3 項分岐木の構築もとても面倒な作業になるものと思われる。

(3) 格付けモデルへの拡張可能性

3 項分岐木モデルと格付けモデルの融合は比較的簡単である物と考えられる。 M 種類の格付けと倒産状態を考えれば、本原稿で解説した 3 項分岐木モデルの代わりに $M + 1$ 個の 3 項分岐木を考え、各ノードでそれぞれの格付けに移る確率を考慮に入れながら大きな 3 項分岐木を構築すればよい。ただし、初期時点での社債の期間構造を取り入れた格付けモデルの構築は難しいのではないかと著者は予想している。

参考文献

1. Duffie, D. and Singleton, K. (1999) Modeling term structures of defaultable bonds, *The Review of Financial Studies* **12**, 687-720.
2. Hull, J. and White, A. (1994) Numerical procedures for implementing term structure models I: single-factor models, *The Journal of Derivatives* **2**, 7-16.
3. Hull, J. and White, A. (1994) Numerical procedures for implementing term structure models II: two-factor models, *The Journal of Derivatives* **2**, 37-48.
4. Jarrow, R. and Turnbull, S. (1995) Pricing derivatives with credit risk, *Journal of Finance* **50**, 53-86.
5. Jarrow, R. Lando, D. and Turnbull, S. (1997) A markov model for the term structure of credit risk spreads, *Review of Financial Studies* **10**, 481-523.
6. Kijima, M. (1999) A Gaussian Term Structure Model of Credit Spreads and Valuation of Credit Spread Options, *Kyoto University Economic Review* **70**, 13-30
7. Kunitomo, N. and Takahashi, A. (2001) The asymptotic expansion approach to the valuation of interest rate contingent claims, *Mathematical Finance* **11**, 117-151.
8. Lando, D. (1998) On Cox processes and credit-risky securities. *Review of Derivatives Research* **2**, 99-120
9. Longstaff, F. and Schwartz, E. (1995) Valuing risky debt: A new approach, *Journal of Finance* **50**, 789-821
10. Merton, R. (1974) On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates, *Journal of Finance* **29**, 449-470
11. Muroi, Y. (2002) Pricing American put options on defaultable bonds, *Asia-Pacific Financial Markets* **9**, 217-239
12. Muroi, Y. (2005) Pricing contingent claim with credit risk: Asymptotic expansion approach, to be published in *Finance and Stochastics*
13. Muroi, Y. (2004) A review for Pricing Problems of Options on Defaultable Bonds, working

paper

14. Schönbucher (2002/2003) A tree implementation of a credit spread model for credit derivatives, *Journal of Computational Finance* **6**, 1-38
15. 小田信行 (1999) 信用リスクを反映した金融商品のプライシング, *金融研究* **18**(1), 65-104
16. 木島正明・小守林克哉 (1999) 信用リスク評価の数理モデル, 朝倉書店
17. 楠岡成雄・青沼君明・中川秀敏 (2001) クレジット・リスク・モデル, 金融財政事情研究会
18. 国友直人・高橋明彦 (2003) 数理ファイナンスの基礎・マリアバン解析と漸近展開の応用, 東洋経済新報社
19. 丸茂幸平・家田明 (2001) 信用リスクのある金融商品のコックス過程を用いたプライシング方法, *金融研究* **20**(別冊), 19-47

図 1. 確率過程 $\{x_t\}$ の 3 項分岐木

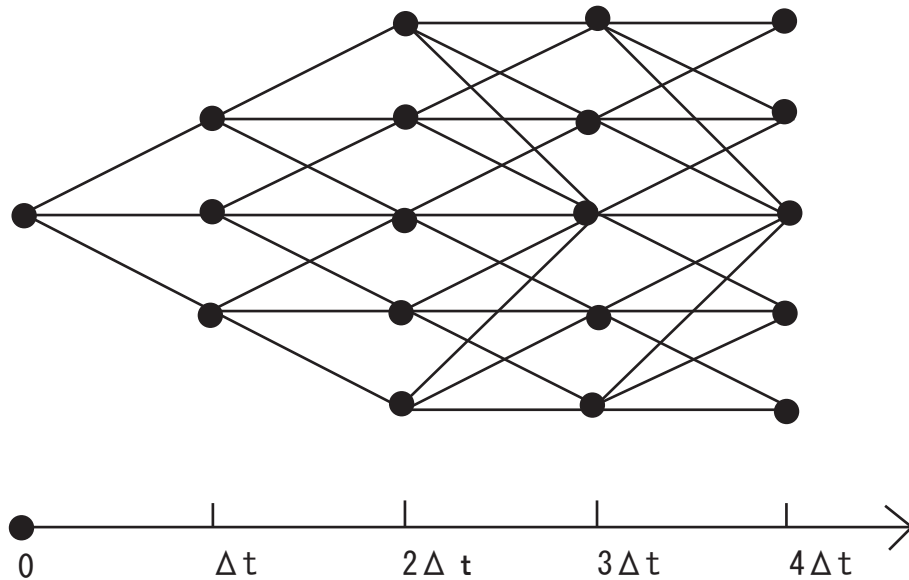
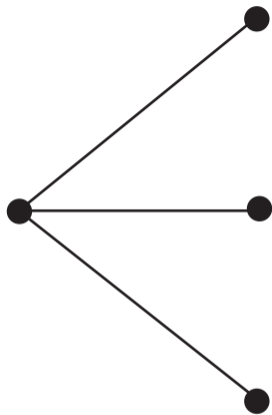
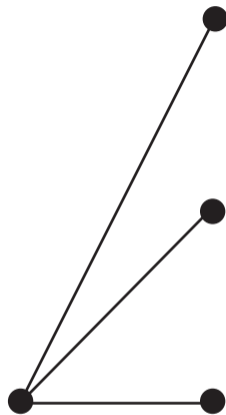


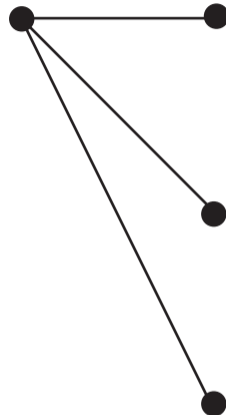
図 2. 3 項分岐木で用いられる 3 種類の枝



(a)



(b)



(c)

図3. 相関係数とオプション価格

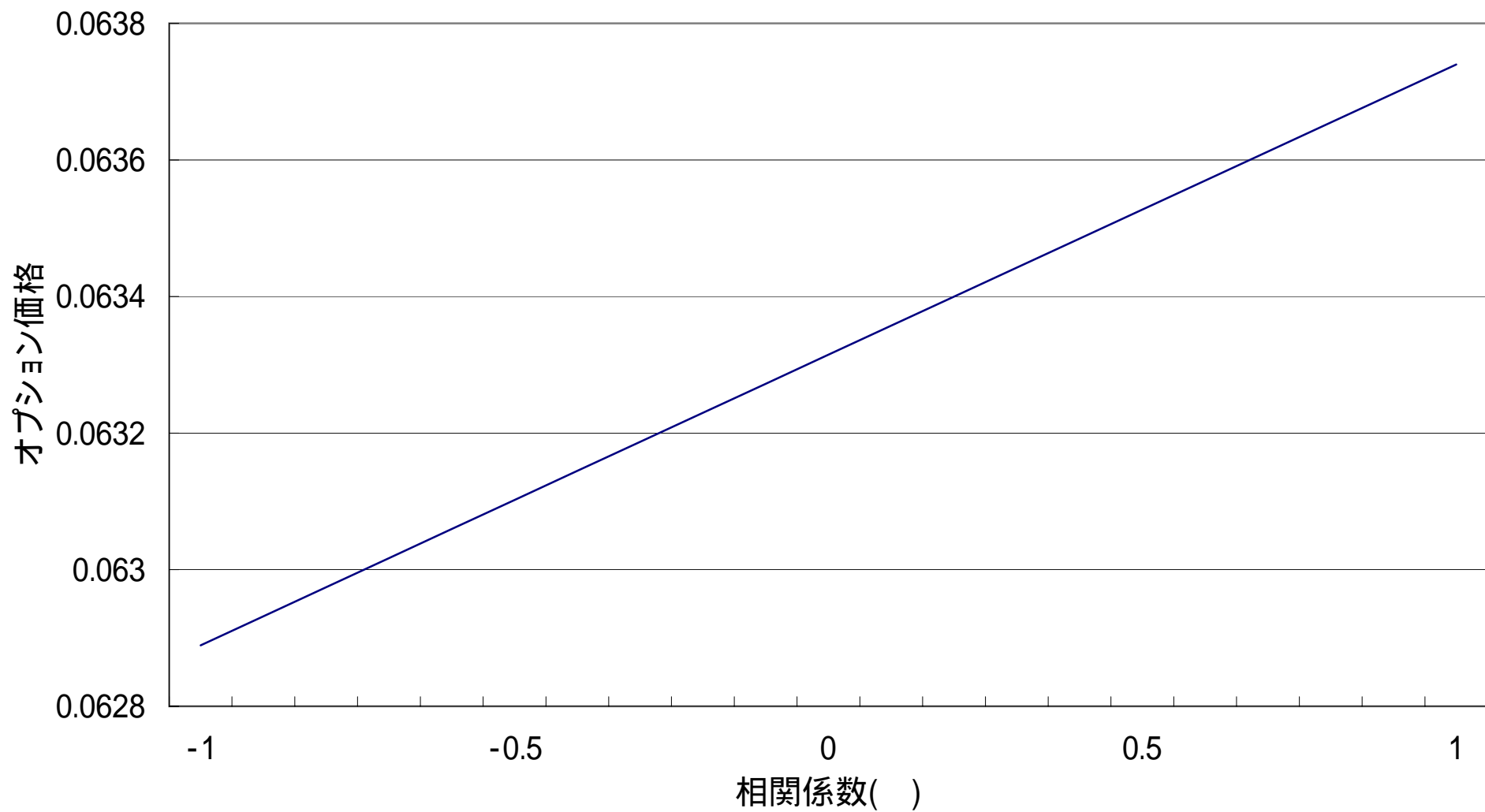


図4. リカバリーレートとオプション価格

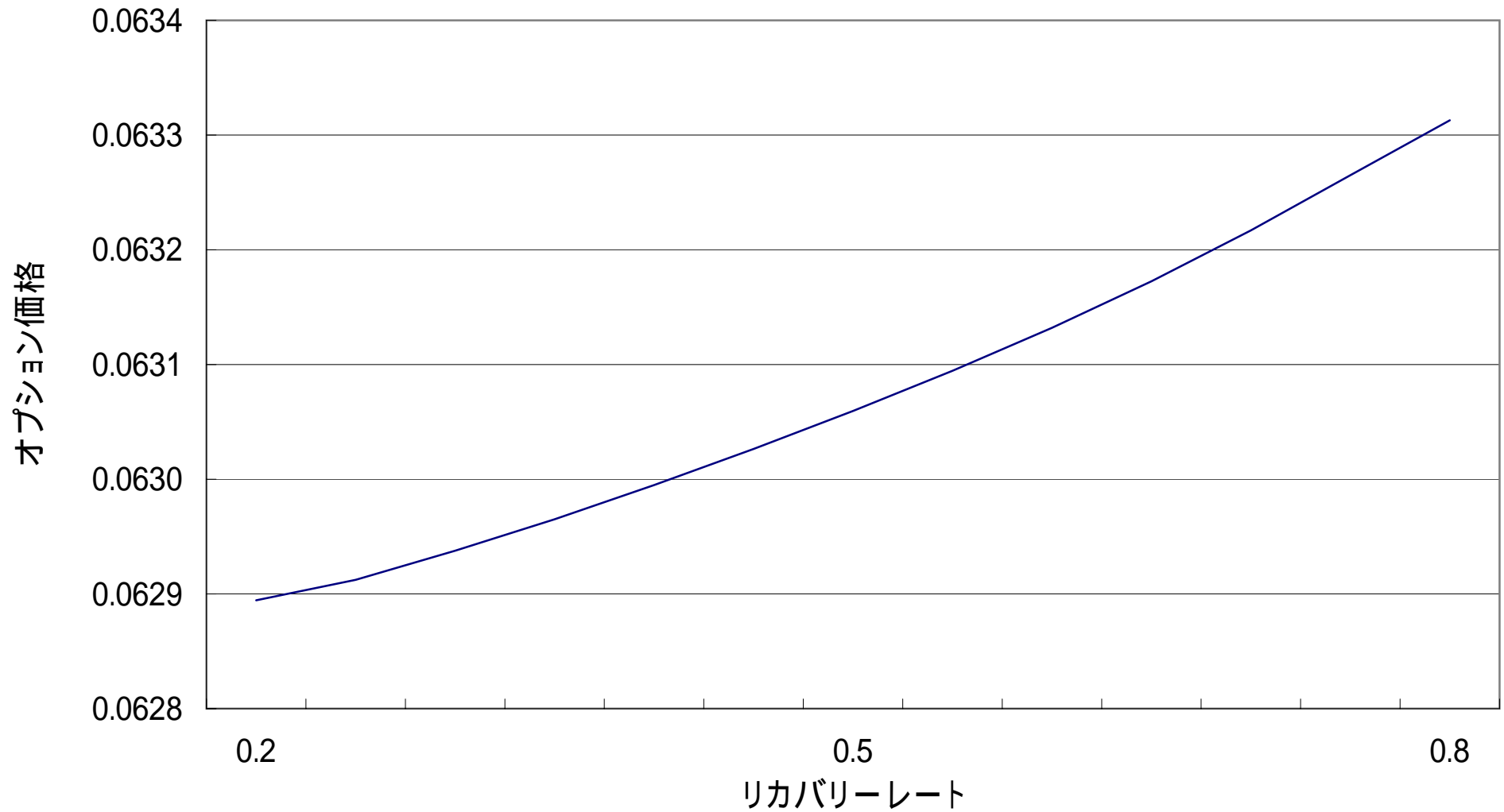


図5. ボラティリティとオプション価格

