

## Seasonality and Seasonal Switching Time Series Models

In the recent X-12-ARIMA program developed by the United States Census Bureau for seasonal adjustments, the RegARIMA modeling has been extensively utilized. We shall discuss some problems in the RegARIMA modeling when the time series are realizations of non-stationary integrated stochastic processes with fixed regressors.

We propose to use the seasonal switching autoregressive moving average (SSARMA) model and the regression SSARMA (RegSSARMA) model to cope with seasonality commonly observed in many economic time series. We investigate the basic properties of the SSAR (seasonal switching autoregressive) models. We argue that the phenomenon called “spurious seasonal unit roots” could be an explanation for a good fit of the seasonal ARIMA models to actual data. Some results of economic data analyses are reported.

# 経済季節性と季節転換時系列モデル

国友直人\*

高岡慎†

2004年8月(第1稿)

2005年6月(改訂稿)

## 概要

米国商務省センサス局で開発されている季節調整プログラム X-12-ARIMA(2002)では RegARIMA モデルと呼ばれる統計的時系列モデルを利用してデータの事前調整を行っている。本稿ではまず経済時系列が非定常な和分過程 (nonstationary integrated process) の実現値であると見なして RegARIMA モデルを利用すると必然的に生じる見せかけの季節単位根 (spurious seasonal unit roots) と呼ぶべき統計的問題点を指摘する。次に多くの経済時系列において観察される季節性を処理する枠組みとして、季節転換自己回帰移動平均モデル (SSARMA モデル) および回帰季節転換自己回帰移動平均モデル (RegSSARMA モデル) を提案し、経済時系列の季節性の理解や季節調整への利用を例示する。

## 鍵言葉

X-12-ARIMA, 季節調整, RegARIMA モデル, 見せかけの季節単位根 (spurious seasonal unit roots), SSARIMA モデル, RegSSARMA モデル

---

\*東京大学大学院経済学研究科 (〒 113-0033 東京都文京区本郷 7-3-1)

†東京大学先端科学技術研究センター (〒 153-8904 東京都目黒区駒場 4-6-1)

## 1 はじめに

経済時系列における季節的変動は統計的時系列分析の重要な対象である。特に日本や米国を含め世界中の多くの官庁では月次や四半期ごとに多くの経済統計を公式の統計として公表している。したがって季節性の処理問題は単に経済データの解析ということにとどまらず、官庁より定期的に公表している経済・社会データが重要な情報として様々な形で活用されていることから社会的に重要となっている。中央政府では官庁統計データを基礎資料として活用し、様々な政策の決定や評価を行っている。さらに家計や企業など民間経済主体もまた定期的に公表される経済統計を活用し、消費や投資など活動の意志決定における基礎資料として利用している。ここで経済時系列の原系列の多くには程度の差こそあれ、季節的要因が含まれている為に原系列を観察することにより直接に関心のある側面についての情報を得ることは容易でない。しかしながら、例えば経済全体の動きとして景気動向を分析することは経済政策の当局者や民間エコノミストにとり重要な問題であるが、分析対象となる経済時系列が季節変動によりその分析が左右されることは望ましくないと考えられよう。こうした側面は単なる例示にすぎないが、経済時系列における季節性の統計的処理の問題は政府の政策決定や民間の経済活動に関わる実用上の課題としても、極めて重要なのである。

日本をはじめ多くの先進諸国では経済統計の季節調整済系列を公表するにあたって、経済データの季節性を処理する為の何らかの統計的方法を利用して季節調整を行っている。この点に関連する官庁統計における近年での最も重要な動きは、米国商務省センサス局に属する時系列研究グループにより季節調整ソフトウェア X-12-ARIMA の最新版が公開されたことであろう。この新しいソフトウェア X-12-ARIMA では RegARIMA モデルと呼ばれる統計的時系列モデルが広範に利用されている<sup>1</sup>ことがこれまで利用されてきた季節調整プログラム X-11 との相違点とされている。この X-12-ARIMA プログラムは日本の官庁当局を含めて広汎に利用されているので、実務的レベルへの影響は非常に大きい。

本稿ではまず X-12-ARIMA において基本的分析用具となっている統計的モデルである RegARIMA モデルに基づく時系列の処理について、いくつかの重要な統計的問題があることを指摘する。実際の経済データに RegARIMA モデルを当てはめると、多くの場合は分析対象の時系列データが季節和分 (seasonal integration) を有する時系列の実現値であると見なされる。このことを素直に解釈すると、経済時系列の多くはランダム・ウォーク過程にしたがう季節性を含んでいることになる。仮に経済時系列が季節和分を含んでいると見ると、季節成分の分散は時間にほぼ比例するよう増大していくはずである。しかしながら、多くの経済時系列では季節変動のパターンは時間の経過とともに変動してはいるものの、ランダム・ウォークや和分過程のようにその季節的ばらつきが一方向的に大きくなっていくとは見なし難く、かなりの規則性が観察されることが多い。そこで、現実に観察される経済季節性を、季節和分を含む非定常な確率過程の実現値として処理するのが適切であるのか否かという統計的問題が生じることになる。他方、季節的ランダム・ウォーク・モデルや季節和分過程モデルを利用するとしばしば満足すべき結果をもたらすように判断されることも事実である。ここでは統計的に検出される非定常な季節

---

<sup>1</sup>季節調整プログラム X-11 と X-12-ARIMA や RegARIMA モデルの利用についての詳細は例えば Shiskin et. al. (1967), Findley et. al. (1998) や国友 (2004) を参照されたい。また、この間の季節調整法を巡る議論については例えば統計数理 (「季節調整特集号」1997 年) に掲載された論考や国友 (2001) を参照されたい。

性モデルの当てはまりはある意味で「見せかけの効果」(spurious effects) である可能性があり、別の方向から季節性を表現することが可能かもしれないという論点を指摘する。もし、見せかけの季節性の効果が正しい解釈であるとする、季節性のある経済時系列の予測問題、あるいは特に時系列モデルを用いる季節調整法の評価にとり重要な問題を提起していることになる。

次に本稿では季節転換 ARMA(SSARMA) および RegSSARMA と呼ぶ時系列モデルのクラスを導入し、経済時系列の季節性の処理に利用することを考察する。こうした時系列モデルは1変量季節 ARIMA モデルおよび季節 RegARMA モデルの比較的単純な拡張と見なせる、非定常なトレンド要素と組み合わさった定常な季節性の表現を可能にする。ここでは SSAR モデルは非常に柔軟であり、多くの季節性を表現する統計的モデルをその特殊ケースとして含んでいるということを説明する。また、ここしばらく経済時系列分析では標準的となっている季節 ARIMA モデルを実際のデータに適用する時によく季節単位根を導入すべきという結論に至るのは何故かという問題についての理論的な結果を示し、さらに実証例を用いて説明する。本稿で導入する季節転換時系列モデルと RegSSAR モデルを利用して実際の経済時系列の季節性を扱う統計的方法には、季節調整を含めて様々な応用があると思われる。

なお、季節転換時系列 SSAR モデルに関連する類似の時系列モデルとしては、PAR モデル(周期的 AR モデル) と呼ばれる時系列モデルのクラスが既に提案されている。こうした季節性の時系列モデルの詳細は Franses (1996) や Ghysel=Osborn (2001) などに説明されている。本稿で導入する季節転換 SSAR モデルはこれらの時系列モデルとは幾つかの点で異なっており、両者の関係については 3.4 節で議論する。

あらかじめ本稿の構成を説明しておく、2章では季節調整プログラム X-12-ARIMA で利用している RegARIMA モデルにおける回帰パートの推定について考察し、統計的問題点を指摘する。次に3章では季節転換時系列モデル SSARMA モデルおよび RegSSARMA モデルを導入し、それらの統計的な性質について説明する。4章では日本の民間消費支出と、Box=Jenkins (1976) で用いられた著名な航空機利用者数の時系列データを用いた分析を報告する。最後に5章において本稿で得られた結論を示す。理論的結果に関する数理的証明の詳細は数学補論にまとめて与えておいた。

## 2 RegARIMA モデルと非定常性

米国センサス局によって開発されている季節調整プログラム X-12-ARIMA では RegARIMA モデル (Findley et. al. (1998)) と呼ばれる時系列モデルのクラスが重要な役割を演じている。本節ではこの自己回帰和分移動平均にしたがう誤差を持つ回帰 (regression autoregressive integrated moving average、略して RegARIMA) モデルについてこれまで指摘されていないように思われる重要な統計的問題を考察しよう。ここで確率変数列  $\{y_t, t = 0, 1, \dots\}$  は確率定差方程式

$$(2.1) \quad \phi_p(B)\Phi_P(B^s)(1-B)^d(1-B^s)^D[y_t - \sum_{j=1}^r \beta_j z_{jt}] = \theta_q(B)\Theta_Q(B^s)\sigma v_t,$$

を満たす 1 変量の時系列とする。ここで  $B$  は  $By_t = y_{t-1}$  となるバック・シフト・オペレータ、 $\{z_{jt}, j = 1, \dots, r\}$  は  $r$  個の非確率的な説明変数である。さらに、季節自己回帰和分移動平均 (SARIMA) モデルに関するラグ多項式を季節周期  $s$  (正整数) に対し

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \phi_p(B) &= 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p, \\ \Phi_P(B^s) &= 1 - \Phi_1 B^s - \dots - \Phi_P B^{sP}, \\ \theta_q(B) &= 1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q, \\ \Theta_Q(B^s) &= 1 - \Theta_1 B^s - \dots - \Theta_Q B^{sQ} \end{aligned}$$

と定義しよう。ここで  $\{\phi_j\}, \{\Phi_j\}, \{\theta_j\}, \{\Theta_j\}$  は ARIMA 部分の未知母数 (パラメータ)  $\sigma (> 0)$  は誤差の標準偏差を表す母数であり、 $\{\beta_j\}$  は回帰部分の未知母数である。さらに確率的差分方程式 (2.1) より定まる特性方程式について次の 2 つの条件を仮定する。

(i) 特性方程式

$$(2.3) \quad \phi_p(z) = 0, \Phi_P(z) = 0, \theta_q(z) = 0, \Theta_Q(z) = 0$$

の全ての根の絶対値が 1 よりも大きい。

(ii) 系列  $\{v_t\}$  は互いに独立で同一の分布にしたがう確率変数列であり  $E(v_t) = 0$  かつ  $E(v_t^2) = 1$  を満たす。

ここで説明した RegARIMA モデルによって定義される確率過程は非定常になり得るものであり、時系列モデル (2.1) における未知母数の推定の中でも特に回帰パートの係数の推定については必ずしも明確化されていない問題が存在する。このことを理解するために、まず最初に極めて単純なケースを例に挙げておく。

例 2.1 : 季節調整 X-12-ARIMA プログラムには時系列のレベル・シフトや構造変化を扱う為の様々なオプションが含まれている。ここで離散時間の時系列  $\{y_t, t = 0, 1, \dots\}$  が

$$(2.4) \quad (1 - B^s)[y_t - \beta_0 - \beta_1 z_t] = \sigma v_t,$$

を満足する確率過程とする。ただし  $\{z_t\}$  は  $z_t = -1$  ( $0 \leq t < [\lambda T]$ ),  $z_t = 0$  ( $[\lambda T] \leq t \leq T$ ), により定義される単純なレベル・シフトを表す説明変数、 $[\lambda T]$  (ただし  $0 < \lambda < 1$  であり、 $[\cdot]$  は値を超えない最大整数を表す) をレベル・シフトが起きた時点としておく。Findley et. al. (1998) による RegARIMA モデルの説明に従えば、このような時系列は

$$(2.5) \quad (1 - B^s)y_t = \beta_1(1 - B^s)z_t + \sigma v_t$$

と表現される。さらに、Findley et. al. (1998) ではこのような単純な RegARIMA モデルに含まれる未知母数  $\beta_1$  の推定に関して、定常な誤差項を仮定した標準的な回帰の手法を用いることを提案している。ここで初期値の影響を無視すれば、このようなケースでは

$$(2.6) \quad z_t^* = (1 - B^s)z_t = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leq t < [\lambda T] \\ 1 & \text{if } t = [\lambda T], \dots, [\lambda T] + s - 1 \\ 0 & \text{if } [\lambda T] + s \leq t \leq T \end{cases}$$

により定められる説明変数を用いることになる。

ここで基本的かつ重要な統計的事実としては、 $t$  統計量や  $F$  統計量などの利用という通常の回帰分析の手法は、誤差項が厳密に正規分布にしたがっている場合にのみ適用可能であるという点である。もしこの条件が満たされないならば、統計的検定を含めた標準的な回帰分析の方法を用いる説得的理由を見いだすことは困難である。また他方では、誤差項に関する標準的仮定が満たされない場合での大標本における正当化も困難である。なぜならこの場合には説明変数に関して必要な標準的仮定<sup>2</sup>が満たされていないので、例えば例 2.1 では  $\lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^T [z_t^*]^2 < +\infty$  より情報量はデータ数 ( $T$  あるいは  $n$ ) が増加しても発散せず、こうした状況では一般に一致推定量の存在は保証されない。

次により一般的に誤差項が季節 ARIMA モデルで表される場合の未知母数の統計的推定問題を考えることにしよう。離散時間に観測される 1 次元時系列  $\{y_t\}$  が方程式

$$(2.7) \quad y_t = \beta' z_t + u_t$$

にしたがっているものとしよう。

(iii) 誤差項は

$$(2.8) \quad u_t = [\phi_p(B)\Phi_P(B^s)(1-B)^d(1-B^s)^D]^{-1}[\theta_q(B)\Theta_Q(B^s)]\sigma v_t$$

と表現される非定常性を含みうる確率過程とする。

(iv) 回帰変数項  $\beta' z_t = \sum_{i=1}^r \beta_i z_{it}$ 、 $\{z_t = (z_{it})\}$  は非確率の変数<sup>3</sup>から構成される説明変数ベクトルとする。より具体的な説明変数としては季節ダミー変数  $I(t = (j-1)s + i; i = 1, \dots, s, j \geq 1)$  (ただし  $I(\cdot)$  は指示関数) と変数  $\sum_{j=0}^l c_j (t/T)^j I(0 \leq \lambda_j^{(1)} < \lambda_j^{(2)} \leq 1)$  ( $c_j, \lambda_j^{(k)}$  ( $k = 1, 2; 0 \leq j \leq l < \infty$ ) は定数) で表される変数群を考える。

このとき説明変数ベクトル  $z_t$  は  $n \rightarrow +\infty$  のときに条件

$$(2.9) \quad \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n z_{(j-1)s+i} z'_{(j-1)s+i} \rightarrow M_i = \int_0^1 z_i(t) z_i'(t) dt$$

及び

$$(2.10) \quad \frac{1}{n} \max_{1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq s} \|z_{(j-1)s+i}\|^2 \rightarrow 0$$

を満足している。ここで  $sn = T$ 、 $z_i(t)$  は  $t$  ( $0 \leq t \leq 1, i = 1, \dots, s$ ) に依存する  $r \times 1$  ベクトル関数であって、 $M = \sum_{i=1}^s M_i$  は正定値行列であることを仮定する。

ここで誤差項が ARIMA モデルにしたがう線形回帰モデル (2.7) における  $k$  番目の係数  $\beta_k$  ( $k = 1, \dots, r$ ) に対する  $t$  統計量は

$$(2.11) \quad t(\beta_k) = \frac{\hat{\beta}_k - \beta_k}{\sqrt{\hat{\sigma}_{LS}^2 e_k' (\sum_{t=1}^T z_t z_t')^{-1} e_k}},$$

<sup>2</sup>回帰分析における漸近理論の為の標準的仮定については、例えば Anderson (1971) 2 章や Anderson=Kunitomo (1992) を参照されたい。以下の条件 (2.9) や (2.10) は収束条件をより一般化することは可能であるが、結果や証明はやや複雑になる。

<sup>3</sup>季節調整プログラム X-12-ARIMA では様々な説明変数が利用可能であるが非確率的 (deterministic) なダミー変数を定義し利用することができる。さらに本節での説明変数はここで扱うタイプだけでなく様々な変数を考えることができる。

により定義できる。ここで、 $\hat{\beta}_k$  は  $\beta_k$  の最小二乗推定量であり、 $\hat{\sigma}_{LS}^2$  は残差から推定される  $\sigma^2$  の推定量である。また  $\mathbf{e}'_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  は第  $k$  要素が 1 である単位ベクトルとした。このとき誤差項は非常数項過程であることから  $t$  統計量の漸近分布は非正規な分布となるが、より正確に述べると次のことが成り立つ。証明の概略は数学補論に与えておいた。

**定理 2.1** : 式 (2.1) で与えられた *RegARIMA* モデルに関して  $d \geq 1, D \geq 1$  とし、条件 (i)-(iii) を仮定する。  $T \rightarrow +\infty$  とするとき、 $\frac{1}{\sqrt{T}}t(\beta_k)$  の極限となる確率変数を次のように表すことができる。

$$(2.12) \quad t_k^* = \frac{\mathbf{e}'_k \mathbf{M}^{*-1} \int_0^1 [\mathbf{z}^*(r) \bar{B}^*(r)] dr}{\sqrt{\mathbf{e}'_k \mathbf{M}^{*-1} \mathbf{e}_k} \sqrt{\int_0^1 \bar{B}^{*2}(r) dr - \int_0^1 [\mathbf{z}^*(r) \bar{B}^*(r)]' dr \mathbf{M}^{*-1} \int_0^1 [\mathbf{z}^*(r) \bar{B}^*(r)] dr}}$$

ここで、 $\mathbf{M}^* = (1/s)\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{z}^*(r) = (1/s) \sum_{i=1}^s \mathbf{z}_i(r)$  および  $\bar{B}^*(r)$  ( $0 \leq r \leq 1$ ) は次のようにブラウン運動に関する伊藤積分により表現される。

$$(2.13) \quad \begin{aligned} \bar{B}^*(r_{D+d}) = & \int_0^{r_{D+d}} \cdots \int_0^{r_{D+1}} \sum_{i=1}^s \int_0^{r_D} \cdots \int_0^{r_1} dB_i(r_0) \prod_{l=1}^{D-1} dr_l \prod_{l'=1}^d dr_{D-1+l'} . \end{aligned}$$

ただし  $B_i(t)$  ( $i = 1, \dots, s$ ) は  $[0, 1]$  で定義される標準ブラウン運動である。

ここで定理 2.1 で導いた統計量を表現するブラウン運動や多重伊藤積分についての定義や性質は、確率解析の標準的な文献である Ikeda=Watanabe (1989) を参照されたい。上述の定理では  $d \geq 1$  のケースを扱った。同様に  $d = 0$  のケースに関して  $t$  統計量の極限となる確率変数を得ることができるが、表現が少し異なるので次に述べておく。

**定理 2.2** : 式 (2.1) で与えられた *RegARIMA* モデルに関して  $d = 0, D \geq 1$  とし、条件 (i)-(iii) を仮定する。  $T \rightarrow +\infty$  の時に  $\frac{1}{\sqrt{T}}t(\beta_k)$  の極限となる確率変数を次のように表すことができる。

$$(2.14) \quad t_k^* = \frac{\mathbf{e}'_k \mathbf{M}^{-1} \int_0^1 [\sum_{i=1}^s \mathbf{z}_i(r) \bar{B}_i(r)] dr}{\sqrt{\mathbf{e}'_k \mathbf{M}^{-1} \mathbf{e}_k} \sqrt{s \int_0^1 \sum_{i=1}^s \bar{B}_i^2(r) dr - \int_0^1 [\sum_{i=1}^s \mathbf{z}_i(r) \bar{B}_i(r)]' dr \mathbf{M}^{-1} \int_0^1 [\sum_{i=1}^s \mathbf{z}_i(r) \bar{B}_i(r)] dr}}$$

ここで、 $\bar{B}_i(r_D)$  ( $i = 1, \dots, s$ ) は次のようなブラウン運動に関する伊藤積分による表現が可能である。

$$(2.15) \quad \bar{B}_i(r_D) = \int_0^{r_D} \cdots \int_0^{r_1} dB_i(r_0) \prod_{l=1}^{D-1} dr_l .$$

ただし、 $B_i(t)$  ( $i = 1, \dots, s$ ) は  $[0, 1]$  で定義される標準ブラウン運動である。

これら定理 2.1 と定理 2.2 で述べた統計量の分布は正規分布や  $t$  分布など統計学によく出ている標準的分布とはかなり異なることに注意しておこう。こうした非定常系列に関連した統計量の分布については近年の経済時系列論（例えば Tanaka (1996) や Hamilton (1994) が詳しい）ではしばしば登場するが、ここでは次の具体例を挙げるにとどめる。

例 2.2 : ここで  $d = 0, D = 1, r = 1$  であり、かつ説明変数  $\{z_t\}$  が  $z_t = -1$  ( $0 \leq t < [\lambda T]$ ),  $z_t = 0$  ( $[\lambda T] \leq t \leq T$ ) で与えられる場合を考えよう。T は観測数、 $[\lambda T]$  ( $0 < \lambda < 1$ ) はレベル・シフトの期間とする。このとき、定理 2.2 における  $t$  統計量の極限分布の表現はかなり簡単化されて

$$(2.16) \quad t^* = \frac{(-1) \int_0^\lambda [\sum_{i=1}^s B_i(t)] dt}{\sqrt{\lambda s \int_0^1 \sum_{i=1}^s B_i^2(t) dt - [\int_0^\lambda \sum_{i=1}^s B_i(t) dt]^2}}$$

で与えられる。

一般には確率変数  $t_k^*$  ( $k = 1, \dots, r$ ) の分布には 2 つの大きな特徴がある。第一に、基本的な  $t$  統計量に対して  $1/\sqrt{T}$  という基準化が必要となる点である。第二にはその極限分布が、標準正規分布とも通常の  $t$  分布とも明らかに異なるという点である。我々はシミュレーションにより  $t_k^*$  ( $k = 1, \dots, r$ ) の極限分布を発生させ、統計的性質について検討したが、その結果では和分の次数  $d$  と  $D$  に大きく依存して正規分布とはかなり異なる歪みを持った分布が得られることが分かった。これらのことより、誤差項が非定常な場合には RegARIMA モデルの中で回帰係数について通常の  $t$  検定を行うことを正当化することが困難であることがわかった。実際の時系列の解析ではデータ数が有限であるので、上の定理をそのまま使うことの是非についてはより詳しく検討すべき課題であろう。

なお、条件 (2.9) と (2.10) は説明変数に時間そのものに関する多項式など非確率的トレンド関数の存在を排除している。説明変数にある種のトレンドが存在する場合には誤差項が非定常な和分過程であっても母係数の最小二乗推定量が一致性を持つことがあること（例えば Hamilton (1994) 16 章の例）が知られていることに注意しておく。

ここで季節調整プログラム X-12-ARIMA の議論に戻ると、X-12-ARIMA プログラムでは本節で取りあげた RegARIMA モデルを広く利用することを推奨していることが重要な論点である。そして RegARIMA モデルを容易に利用できるように様々な変数を回帰変数として組み込み、半ば自動的に時系列モデルを推定し、半ば自動的に予測値を利用した季節調整を可能にしている。ところが本節では既によく用いられる  $t$  統計量を一つの例として指摘したように、RegARIMA モデルを通常の時系列解析の教科書で説明されている線形定常モデルとして理解することはできないという問題があり、必ずしも標準的時系列モデルとは同じでない側面があるという意味で、その利用にはかなりの注意が必要なのである。また、実際に経済時系列の季節性を分析してみると、RegARIMA モデルが役に立つように見えるのは事実であるが、そのことに関連する季節性のとらえ方についての解釈上の問題は次節でより詳しく議論する。



### 3 SSARMA モデルと RegSSARMA モデル

本節では季節転換時系列 (seasonal switching autoregressive moving average、略して SSARMA) モデルと、それに回帰項を加えた回帰 (Reg) SSARMA モデルを導入しよう。ここで説明する RegSSARMA モデルは X-12-ARIMA モデルで利用している RegARIMA モデルを特殊ケースとして包含していることに注意しておく。すなわち、SSARMA モデルの特徴として重要なことは季節 ARIMA モデルを特殊ケースとして含んでいる季節的時系列モデルである。また、さらに多くの事例に関して我々が「見せかけの季節和分」(spurious seasonal integration) と呼んでいる問題を分析することができることも重要である。

#### 3.1 季節転換 ARMA モデル

1次元時系列  $\{y_t, t = 0, 1, \dots\}$  が確率的定差方程式

$$(3.1) \quad \phi_p(B) \sum_{i=1}^s \Phi_P^{(i)}(B^s) I_t^{(i)} [y_t - \sum_{j=1}^r \beta_j z_{jt}] = \theta_q(B) [\sum_{i=1}^s \Theta_Q^{(i)}(B^s) I_t^{(i)} \sigma_i] v_t,$$

にしたがう確率過程であるとしよう。ここで  $p, q, s, P, Q$  は非負の整数 ( $s \geq 1$ ) であり、 $\sigma_i (> 0)$  は誤差の標準偏差である。また  $I_t^{(i)}$  は季節指示関数 (seasonal indicator function) であり、指示関数  $I_t^{(i)}$  は、時点  $t$  が  $i$  番目の季節であるならば  $I_t^{(i)} = 1$ 、そうでないならば  $I_t^{(i)} = 0$  となる関数と定義しよう。 $\{z_{it}\}$  は  $r$  個の説明変数を表し、自己回帰移動平均 (ARMA) 部分に関する記号は

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \phi_p(B) &= 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p, \\ \Phi_P^{(i)}(B^s) &= 1 - \Phi_1^{(i)} B^s - \dots - \Phi_P^{(i)} B^{sP}, \\ \theta_q(B) &= 1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q, \\ \Theta_Q^{(i)}(B^s) &= 1 - \Theta_1^{(i)} B^s - \dots - \Theta_Q^{(i)} B^{sQ}, \end{aligned}$$

で与える。ただし  $\{\phi_j\}, \{\Phi_j^{(i)}\}, \{\theta_j\}, \{\Theta_j^{(i)}\}$  は未知母数で、 $\{\beta_j\}$  は未知の回帰係数をそれぞれ表している。

本節では (3.1) 式で与えられる季節時系列モデルについて次に挙げる二つの条件を仮定する。

(i) ARMA 部分に関する特性方程式

$$(3.3) \quad \phi_p(z) = 0, \Phi_P^{(i)}(z) = 0, \theta_q(z) = 0, \Theta_Q^{(i)}(z) = 0$$

の全ての解の絶対値は 1 よりも大きい。

(ii) 確率変数列  $\{v_t\}$  は互いに独立に同一の分布にしたがい、 $\mathbf{E}(v_t) = 0, \mathbf{E}(v_t^2) = 1$  でありかつその分布関数はルベーグ測度に関して絶対連続である。

ここで導入した季節転換時系列 (SSARMA) モデル、および RegSSARMA モデルの定式化は既存の季節性を含む線形時系列モデルとはやや異なっていることに注意しておく。この SSARMA モデルのクラスにより定められる離散時間の確率過程は、よく知ら

れている線形の季節自己回帰移動平均モデル (seasonal autoregressive moving average model、略して SARMA モデル) に比べるとはるかに広いクラスとなっている。したがって、SARMA モデルを当てはめると非定常に見える時系列に関してもかなりの場合には定常となりうるのである。ここでは単純な例を用いて、SSARMA モデルの特徴的な性質について説明する。

例 3.1 : 1 次元時系列  $\{y_t; t = 0, 1, \dots\}$  が確率的定差方程式

$$(3.4) \quad y_t = \sum_{i=1}^s I_t^{(i)} [a_i + b_i y_{t-s} + \sigma_i v_t],$$

を満たす離散時間の確率過程とする。ここで  $\{a_i\}, \{b_i\}, \{\sigma_i\}$  は未知母数であり、この季節の時系列モデルを SSAR(0,1) モデル<sup>4</sup> と表記することとしよう。係数についての条件

$$(3.5) \quad \max_{i=1, \dots, s} |b_i| < 1,$$

を満たしていれば、SSAR(0,1) モデルは

$$(3.6) \quad \sum_{i=1}^s (1 - b_i B^s) I_t^{(i)} [y_t - \mu_i] = \left[ \sum_{i=1}^s \sigma_i I_t^{(i)} \right] v_t,$$

と書き直すことができる。ただし、 $\mu_i$  ( $i = 1, \dots, s$ ) は季節的平均を表す母数であり、 $(1 - b_i)\mu_i = a_i$  という表現が得られる。

一般にここで説明している季節転換時系列 (SSARMA) モデルの最も重要な特徴は、各季節毎に季節的構造が変化することを許している点であり、そのような仕組みは時間の経過とともに生じるある種の非線形的な現象 (あるいは各季節に固有な変動) を表現する統計的モデルとしては自然なものと見なすことができよう。例えば、母数に全く制約のない例 3.1 の SSAR(0, 1) モデルには  $3s$  個の未知パラメータを含んでいるが、明らかにこの時系列モデルは Box-Jenkins (1976) で提案された季節 ARIMA (seasonal autoregressive integrated moving average) モデルなどのような、季節性を含む線形時系列モデルを包含している。もし、各季節の誤差のばらつき (分散母数) が同一 ( $\sigma_i = \sigma$ ) であるならば、その場合の SSAR(0, 1) モデルは季節性に関する確率的係数モデルと見なせる。また、さらに係数が等しい ( $a_i = a$  かつ  $b_i = b$ ) とするならば、この時系列モデルは Box-Jenkins が用いた線形季節 AR モデルになることがわかる。さらに

$$(3.7) \quad b_i = 1 \quad (i = 1, \dots, s)$$

および  $a_i = a, \sigma_i = \sigma$  という条件が同時に成り立つならば、標準的な非定常の (季節) 和分過程モデルが得られることになる<sup>5</sup>。

ここで、経済時系列の分析でこれまでによく利用されている季節 ARIMA モデルでは季節毎の係数や季節要素の変動を表す分散ははじめから一定と仮定して分析しているこ

<sup>4</sup>ここで SSAR(p,P) の引数は共通自己回帰部分と季節自己回帰を表すこととした。レフェリーが指摘したように 3.4 節で説明する PAR モデルとの比較の意味で重要である。

<sup>5</sup>こうした季節時系列モデルを拡張して閾値を含むより複雑な閾値 (Threshold) 非線形時系列モデルによる分析も可能であるが本稿では季節転換時系列モデルに議論を限定する。

とに注意しよう。ところが、例えば日本のマクロ時系列データを例にとれば例えば賃金支払いにおけるボーナス制などの影響もあり、所得や消費の季節的パターンや変動幅が相当に異なっていると考えられる。すなわち、経済時系列の場合には各季節に固有の変動要因の係数やばらつきが一定とする根拠は必ずしも明らかではないのである。ここで導入した SSARMA モデルを用いるとこうした問題について再検討する足がかりができることになることを例によって示しておこう。

### 3.2 季節転換 AR モデルの統計的性質

季節転換 ARMA モデルは季節毎の季節性変化を含んだ季節的時系列モデルなので、ここで基本的な統計的性質について確認しておこう。前節の例 3.1 で説明した SSAR(1) モデルを用いて、 $s$  次元ベクトル  $\mathbf{Y}'(t) = (y_t, y_{t-1}, \dots, y_{t-s+1})$  の動的挙動を考察しよう。この状態変数を使うと時系列  $\{y_t\}$  のマルコフ表現

$$(3.8) \quad \mathbf{Y}(t) = \mathbf{a}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{Y}(t-1) + \mathbf{V}(t)$$

が得られる。ここで  $\mathbf{a}(t)$  は  $s \times 1$  ベクトル、 $\mathbf{B}(t)$  は  $s \times s$  係数行列であり、各季節成分の母係数と季節的指示関数により

$$\mathbf{a}(t) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^s a_i I_t^{(i)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \sum_{i=1}^s b_i I_t^{(i)} \\ 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ \mathbf{0} & & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

と表現される。また  $\mathbf{V}(t)$  は各季節成分の分散母数により

$$\mathbf{V}(t) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^s \sigma_i I_t^{(i)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} v_t$$

と表現される  $s \times 1$  誤差項ベクトルである。ここで式 (3.8) を用いると、マルコフ表現に対応する特性方程式は

$$(3.9) \quad |\lambda \mathbf{I}_s - \mathbf{B}(t)| = 0$$

となる。ただし  $\mathbf{I}_s$  は  $s \times s$  単位行列の意味である。この表現より安定条件

$$(3.10) \quad \max_{i=1, \dots, s} |b_i| < 1$$

が満たされるならば、式 (3.9) を満たす全ての特性根の絶対値が 1 未満になることがわかる。

次に例 3.1 についてもう一つのマルコフ表現を得る為に、 $s$  次元状態ベクトル  $\mathbf{Y}'_j = (y_{(j-1)s+s}, y_{(j-1)s+s-1}, \dots, y_{(j-1)s+1})$  ( $j = 1, \dots, n$ ) を導入しよう。さらに分析を簡単にする為にデータ数を  $T = ns$  (すなわち  $n$  年間) と仮定しよう。このとき、マルコフ表現

$$(3.11) \quad \mathbf{Y}_j = \mathbf{a} + \mathbf{B}_1 \mathbf{Y}_{j-1} + \mathbf{V}_j$$

が得られる。ただし  $\mathbf{a}$  は  $s \times 1$  ベクトル、 $\mathbf{B}_1$  は  $s \times s$  係数行列を表し、それぞれ

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_s \\ a_{s-1} \\ \vdots \\ a_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} b_s & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{s-1} & 0 & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & & b_1 \end{pmatrix}$$

で与えられる。また  $\mathbf{V}_j$  は  $s \times 1$  の誤差項ベクトルであり、

$$\mathbf{V}_j = \begin{pmatrix} \sigma_s v_{(j-1)s+s} \\ \sigma_{s-1} v_{(j-1)s+s-1} \\ \vdots \\ \sigma_1 v_{(j-1)s+1} \end{pmatrix}$$

で与えられる。

ここでのマルコフ表現 (3.11) に対応する特性方程式は

$$(3.12) \quad |\lambda \mathbf{I}_s - \mathbf{B}_1| = 0$$

となる。したがって、仮定 (3.10) の下では式 (3.12) の全ての特性根の絶対値は 1 より小さいことが分かる。

ここで、さらにより一般的に式 (3.1) に対する  $(s+p)$  次元の状態ベクトルを  $\mathbf{Y}'_j = (y_{(j-1)s+s}^*, y_{(j-1)s+s-1}^*, \dots, y_{(j-1)s+1-p}^*)$  ( $j = 1, \dots, n$ ) で表すことにしよう。ただし、 $y_t^* = y_t - \sum_{j=1}^r \beta_j z_{jt}$  であり、説明変数の一部分 (あるいは全部) に季節ダミー変数を含み、 $z_{it} = I_{it}$  ( $i = 1, \dots, s$ ) ( $r \geq s$ ) としておく。このとき、確率的定差方程式 (3.1) 式にしたがう確率過程の解については次の結果が得られる。証明は数学補論に与えておく。

**定理 3.1** : 離散時間の時系列  $\{y_t\}$  が式 (3.1) で与えられる *SSARMA* 過程にしたがい、条件 (ii) を満たすものとする。このとき  $(s+p)$  次元確率過程  $\{\mathbf{Y}_j; j = 1, \dots\}$  に対して定常解が存在する必要十分条件は変数  $z$  に関する多項式

$$(3.13) \quad \phi_p(z) = 0, \quad \Phi_P^{(i)}(z) = 0 \quad (i = 1, \dots, s)$$

の全ての解の絶対値が 1 よりも大きいことである。

これまで経済時系列分析において実際によく用いられている季節 ARIMA モデルに関するひとつの重要な問題は、季節に関する非定常性である。経済データに対して例えば Box-Jenkins 法を用いて季節 ARIMA モデルを統計的に当てはめると、季節階差 (seasonal differences) を取ることが統計的に適切であるように解釈されることが多い。しかしなが

ら、本節で導入した季節転換 ARMA モデルに基づく非 ARMA 型の時系列分析の視点から見直して見ると、こうした分析結果は線形 1 変量時系列モデルを用いることによって生じている、見かけ上の推定結果の可能性が高く、季節的な母数の違いにより発生している可能性がある。すなわち、”見かけ上の季節和分”(spurious seasonal integration) と解釈すべき可能性があるのである。例えば実際には季節パターンが各季節毎に異なる場合に線形時系列モデルを当てはめて見るとどのような推定結果が得られるであろうか。このことに関しては次のような結果が得られる。

定理 3.2 : 離散時間の時系列  $\{y_t\}$  は例 3.1 で与えられる  $SSAR(0,1)$  過程にしたがい、誤差項についてモーメント条件  $E[v_t^4] < +\infty$  を満たすものとする。さらに式 (3.5) の安定条件を満たし、 $\{y_t\}$  は定常確率過程とする。時系列  $\{y_t\}$  が線形自己回帰モデルにしたがうと見なして  $y_t$  を  $y_{t-s}$  に回帰した最小二乗推定量は

$$(3.14) \quad \hat{b}_{LS} = \frac{\sum_{t=1}^T (y_{t-s} - \bar{y}_{-s})(y_t - \bar{y})}{\sum_{t=1}^T (y_{t-s} - \bar{y}_{-s})^2},$$

で与えられる。ここで、観測数  $T = sn, \bar{y} = (1/T) \sum_{t=1}^T y_t, \bar{y}_{-s} = (1/T) \sum_{t=1}^T y_{t-s}$  であり、初期条件  $y_t (t \leq 0)$  は固定する。このとき  $n \rightarrow \infty$  につれて、

$$(3.15) \quad \hat{b}_{LS} \xrightarrow{p} b^* = \frac{\sum_{i=1}^s \frac{b_i \sigma_i^2}{1 - b_i^2} + \sum_{i=1}^s (\mu_i - \bar{\mu})^2}{\sum_{i=1}^s \frac{\sigma_i^2}{1 - b_i^2} + \sum_{i=1}^s (\mu_i - \bar{\mu})^2},$$

となる。ただし  $\bar{\mu} = (1/s) \sum_{i=1}^s \mu_i$  である。

ここで  $\sigma_i^2 = \omega_i^2 \tau$  ( $i = 1, \dots, s$ ) であり、

$$(3.16) \quad \lambda(s, \tau) = \frac{\sum_{i=1}^s (\mu_i - \bar{\mu})^2}{\max_{i=1, \dots, s} \{\sigma_i^2\}}$$

とおこう。もし  $\tau \rightarrow 0$  とすると  $\lambda(s, \tau) \rightarrow \infty$  となるので、

$$(3.17) \quad b^* \rightarrow 1$$

である。すなわち、各季節の分散に対応する平均部分の変動幅 (季節的変動係数) が大きければ最小二乗推定値は 1 に近いことになる。この推定値は適切なモデルを季節 ARIMA モデルと誤って生じたものである、ここでは”見かけ上の季節和分”(spurious seasonal integration) と解釈することも可能であろう。

こうした結果を、適当な安定条件の下でより一般的な場合の SSARMA モデルに対して拡張することは比較的容易であると思われる。ここで得られた結果により、経済時系列において非線形的な季節変動 (あるいは各季節に固有な変動) を無視して通常の線形時系列 (ARMA) モデルを当てはめた場合には、対応する特性方程式が単位根を持つとみなされる傾向があるということがわかった。すなわち、しばしば観察される季節的非定常

性は経済時系列に固有の時系列構造というよりも、むしろ季節成分の扱い方をはじめから共通にとることにより統計的分析上で生じる可能性が高いことになる。すなわち、季節毎に係数やばらつきがかなり異なる場合には見かけ上で単位根に近い推定結果が得られやすいことを意味している。

### 3.3 季節性モデルの推定法

季節転換 ARMA モデルと RegARMA モデルの統計的推定法としては最小自乗法と最尤法の二通りの方法が考えられる。

季節転換 AR モデルと RegSSAR モデルにおいては、直接的に状態ベクトル  $\{Y_j, j = 1, \dots, n\}$  ( $T = sn$ ) によるマルコフ表現が得られる。したがって、誤差項が条件 (i) と (ii) を満たす定常確率過程であるという仮定の下では、通常の最小自乗法に基づく回帰の手法を用いることができる。そして得られた推定量の性質については古典的な漸近論を適用することが可能である。

他方、回帰部分と季節性部分を表現する未知母数の推定に当たっては最尤法を利用することもできる。最尤法は、RegSSARMA モデルのパラメータの取り得る値に制約がある場合の検定が容易であり、同時に情報量基準 AIC (Akaike (1973)) に基づくモデル選択を行うことができるという点で、最小二乗法よりも有用であるとも云えよう。また、RegSSARMA モデルは季節性を含む多くのモデルを包含しているので、ここでは主に誤差項の分布に正規分布を仮定した最尤法によりデータ解析を行うこととした。

### 3.4 PAR モデル (周期的季節モデル) との関係

本稿で考察している季節転換時系列モデルに関連する時系列モデルとしては例えば、周期的 AR (periodic autoregressive、略して PAR) モデルと呼ばれるモデルが Franses (1996) や Ghysel=Osborn (2001) 等で研究されている。季節転換 ARMA モデルはこれらの時系列モデルのクラスとはいくつかの点でやや異なっている。ここで、PAR モデルと SSARMA モデルとの関係を見るために、時系列  $\{y_t\}$  ( $t = (j-1)s + i$ ) が 1 次の周期的 AR モデル

$$(3.18) \quad y_{(j-1)s+i} = \phi_i y_{(j-1)s+i-1} + v_{(j-1)s+i} \quad (i = 1, \dots, s; j = 1, \dots, n),$$

に従っている状況を考えよう。ここで、確率変数系列  $\{v_t\}$  は互いに独立であり、モーメント条件  $E(v_{(j-1)s+i}) = 0$  および  $E(v_{(j-1)s+i}^2) = \sigma_i^2$  ( $i = 1, \dots, s$ ) を満足すると仮定する。

このとき時系列  $\{y_t\}$  の SSARMA 表現は

$$(3.19) \quad y_{(j-1)s+i} = b_i y_{(j-2)s+i} + u_{(j-1)s+i} \quad (i = 1, \dots, s),$$

となる。さらに母係数について  $b_i = \prod_{j=0}^{s-1} \phi_{i-j}$ 、 $-s+1 \leq i-j \leq 0$  に対して  $\phi_{i-j} = \phi_{i-j+s}$  であるとしよう。誤差項は

$$(3.20) \quad u_{(j-1)s+i} = v_{(j-1)s+i} + \sum_{k=1}^{s-1} \prod_{l=0}^{k-1} \phi_{i-l} v_{(j-1)s+i-k} \quad (i = 1, 2, \dots, s),$$

と表される  $(s-1)$  次の MA 過程となるが、表記の簡単化のため  $\prod_{l=0}^0 = 1$  とした。誤差項  $u_{(j-1)s+i}$  の分散は  $i$  に依存するので、時系列  $\{y_t\}$  は季節的に分散不均一な過程となる。ここで例えば  $s=4$  とすると、 $j=1, \dots, 4$  について  $b_j = \phi_1\phi_2\phi_3\phi_4$  となることがただちに分かる。従って、この節で導入した季節転換モデル (SSARMA) は PAR モデルを含むより一般的な時系列モデルとなっていることが分かる<sup>6</sup>。さらに、4 節の推定結果より明らかかなように PAR に課せられた制約条件が現実的であるかはかなり疑問である。

### 3.5 SSARMA モデルの拡張について

本稿では実際の経済時系列の分析のために、回帰項を含む季節転換 ARMA モデルを導入した。この SSAR モデルにはその他の拡張も可能であり、ここで拡張可能性について言及しておこう。季節性を含む時系列の分析では、古典的な統計的時系列分析の方法として、観察される時系列  $\{y_t\}$  が

$$(3.21) \quad y_t = T_t + S_t + I_t$$

という形に分解できると想定することが多い。こうした分析を時系列成分分解モデルと呼ばれるが、ここで  $T_t$  はトレンド成分、 $S_t$  は季節成分、 $I_t$  は不規則成分をそれぞれ表しているものとする。

例えば北川 (1993) が開発している季節調整プログラム DECOMP では、こうした時系列の各成分  $T_t$  に対してランダム・ウォーク・モデルを用い、 $S_t$  に対しては季節階差モデルを利用している。DECOMP は  $\{y_t\}$  の状態空間表現に基づいて開発された季節調整プログラムであるが、SSAR モデルにより表現される季節変動を時系列を構成する要素の一つとして DECOMP と組み合わせて用いることも可能であろう。

## 4 二つのデータ解析例

ここで日本のマクロ経済時系列データの代表例としてマクロ消費データ及び Box=Jenkins (1976) で使われ時系列分析ではよく知られている航空機利用者数の時系列データを用いた分析事例を報告しておく。

ここで扱っている二つのデータには明らかに長期的トレンドが存在している。そうしたトレンドを固定的と見なし、さらに固定的な季節性を除去するために、ここでは RegSSAR モデルの回帰部分として、

$$(4.1) \quad T_t = \sum_{i=1}^s \beta_i D_{it} + \sum_{i=s+1}^{s+k} \beta_i t^{i-s},$$

という関数を用いた。ただし、 $D_{it}$  は季節ダミー変数で、 $\beta' = (\beta_1, \dots, \beta_{s+k})$  は回帰係数ベクトルである。また  $z_t' = (D_{1t}, \dots, D_{st}, t, \dots, t^k)$  は説明変数ベクトル<sup>7</sup> を表している。

<sup>6</sup>例 3.1 での SSAR モデルでは異なる季節間での関係がかなり分離されているように見えるが、例えば  $P = p = 1, s > 1$  の場合を見ると明らかであるが、一般に異なる季節の過去の値や母数が複雑に将来の値に対し影響する。この点を強調する意味でここでは SSAR モデルを SSAR(p,P) モデルと表記した。

<sup>7</sup>ただし、トレンドの変数を用いる場合は (2.9) と (2.10) の条件が満たされるための基準化を Anderson (1971) の定理 2.6.1 にならって適切に行う必要がある。

表 1: マクロ消費データへの SSARMA モデルの適用 (制約が無い場合)

[注意]: モデルの未知母数の推定は、定常性の仮定の下で最尤法を用いた。括弧内は尤度関数の 2 回微分に基づいて構成された推定量の t 値と分散である。

	季節ダミー	AR(4)	$\sigma_i^2$
第 2 四半期	101.34 (10.71)	0.62 (4.25)	5.46
第 3 四半期	106.65 (20.36)	0.67 (4.78)	3.49
第 4 四半期	118.82 (94.56)	0.64 (4.29)	5.60
第 1 四半期	101.16 (315.85)	0.43 (2.37)	8.03
AIC=500.53			

このような定式化により、季節性の平均に意味を持たせ、また最適化する尤度関数の計算を容易にすることができる。RegSSARMA モデルの未知パラメータの推定は誤差項の分布に正規分布を仮定して最尤法によって行ったが、トレンドの推定結果が不安定になることを避けるため、トレンド関数の次数を 3 次以下に制限した。

最初のデータ解析事例は、日本の内閣府によって作成されている重要なマクロ時系列であるマクロ消費支出の四半期データに関するものである。原系列は 1975 年第 2 四半期から 2000 年第 4 四半期までの実質値データであり、全ての数値は最初のデータを 100 に基準化した指数に変換して分析を行った。トレンド関数の次数  $k$  については、AIC を最小化する基準によって、 $k = 3$  を選択した。さらに、誤差項が正規分布にしたがうとの仮定の下で尤度関数を最大化することで RegSSAR モデルにおける母数推定値及び  $t$  値を表 1 に示しておく。

次に RegSSAR モデルにおいて  $\mu_i = \mu$ ,  $b_i = b$  かつ  $\sigma_i = \sigma$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) と仮定した季節ダミー変数付きの自己回帰モデル AR(4) を推定したが、その結果は次のようになった。

$$(4.2) \quad y_t^* = 105.36 + 0.93y_{t-4}^* + 2.64v_t .$$

(104.7)                      (34.2)

ここで得られた  $AIC = 515.25$  である。ただし  $y_t^* = y_t - \sum_{i=s+1}^{s+3} \beta_i t^i$  ( $s = 4$ ) であり、括弧内の数値は  $t$  値を意味している。この結果から、RegARMA を当てはめた場合には、

表 2: マクロ消費系列の分析

季節	$\frac{b_i \sigma_i^2}{1-b_i^2}$	$\frac{\sigma_i^2}{1-b_i^2}$	$(\mu_i - \bar{\mu})^2$
第 2 四半期	5.60	8.96	31.96
第 3 四半期	4.25	6.34	0.12
第 4 四半期	6.02	9.44	139.94
第 1 四半期	4.20	9.83	33.99
合計	20.06	34.56	206.01



表 3: マクロ消費データへの SSARMA モデルの適用 (母数に制約がある場合)

	季節ダミー	AR (4)	$\sigma_i^2$
第 2 四半期	101.47 (134.92)	0.64 (7.30)	6.36
第 3 四半期	106.78 (11.81)	0.64 (7.30)	3.50
第 4 四半期	118.93 (61.01)	0.64 (7.30)	6.36
第 1 四半期	101.29 (211.34)	0.43 (2.70)	6.36
AIC=493.72			

推定される AR 係数は非定常となる領域に非常に近いことがわかる。消費データから定理 4.2 の各項目に当たる量を推定してみると表 2 のような結果が得られた。予想されたとおり、各季節平均を表す母数の変動幅は各季節の分散成分の変動に比べてかなり大きく、線形 ARMA モデルを当てはめると推定値が単位根に近づいているとの解釈が妥当と考えられよう。

一方で、RegSSAR モデルについて推定されたパラメータの値は定常な領域にあり、季節ダミーの係数は各季節で明らかに異なっている。さら、推定値を見ると 1 番目の係数と 4 番目のダミー変数の係数が近く、AR 係数に関しては 4 番目の値だけがその他の係数と異なっている。これらのことより制約なしの RegSSAR モデルよりも、制約を課すことでよりパラメータを節約したモデルがより適切であることが期待される。従って次に、制約なしの RegSSAR モデルに対して一定の制約を係数と分散パラメータに課すことを試みた。主に AIC 最小化基準の観点による試行錯誤を経て、RegSSARMA モデルのクラスの中で最良のモデルとして選ばれた時系列モデルに関して、その推定結果を表 3 に示しておく。

2 番目のデータは Box-Jenkins (1976) で引用された有名な航空機の旅客数の月次データである。このケースについては、やはり AIC 最小化基準を利用すると  $k = 2$  が選択された。制約なしの最尤法による RegSSAR モデルの係数の推定値と  $t$  値を表 4 に示しておく。

また、RegSSAR モデルにおいて  $\mu_i = \mu, b_i = b$  および  $\sigma_i = \sigma (i = 1, \dots, 12)$  なる仮定を置いて通常の線型モデルを推定した結果を示しておく。

$$(4.3) \quad y_t^* = \underset{(116.82)}{100.86} + \underset{(31.27)}{0.90y_{t-12}^*} + 1.23v_t .$$

ここで  $AIC = 498.87$  である。ここでも RegARMA モデルを当てはめた場合には、AR 係数の推定値は非定常に非常に近い値をとっていることが分かった。

この旅客データより各季節成分の値を推定した結果を表 5 にまとめて与えておくが、この場合も消費データの解析結果と同様の推定結果が得られた。また、RegSSARMA モデルのパラメータの推定値は定常な領域に収まっており、ダミー変数の係数は月ごとに明らかに異なっている。特に 7 月と 8 月の係数については推定値が比較的大きくなっており、明らかに 0 ではない 7 月と 8 月の値と較べて、その他の係数は大きく隔たっている。さらに季節ダミーの係数についても同じように、7 月と 8 月はその他の月よりも推定値

表 4: 旅客データへの SSARMA モデルの適用 (母数制約が無い場合)

[注意]: モデルの未知母数の推定は、定常性の仮定の下で最尤法を用いた。括弧内は尤度関数の 2 回微分に基づいて構成された推定量の t 値と分散である。

	季節ダミー	AR (12)	$\sigma_i^2$
1月	98.37 (364.72)	-0.27 (-0.95)	0.62
2月	98.02 (145.92)	0.43 (1.63)	1.79
3月	100.67 (192.88)	0.27 (0.81)	1.60
4月	100.00 (307.82)	-0.31 (-1.07)	1.27
5月	99.93 (353.34)	-0.42 (-1.61)	0.87
6月	102.56 (244.79)	0.41 (1.57)	0.65
7月	104.87 (146.02)	0.81 (4.91)	0.36
8月	104.55 (177.18)	0.71 (3.68)	0.44
9月	101.48 (384.41)	-0.02 (-0.07)	0.34
10月	98.55 (377.21)	-0.07 (-0.22)	0.35
11月	95.51 (325.18)	-0.08 (-0.11)	0.60
12月	97.94 (321.35)	-0.04 (-0.04)	0.64
AIC=429.43			

表 5: 旅客データの分析

月	$\frac{b_i \sigma_i^2}{1-b_i^2}$	$\frac{\sigma_i^2}{1-b_i^2}$	$(\mu_i - \bar{\mu})^2$
1月	-0.18	0.67	3.37
2月	0.95	2.20	4.76
3月	0.46	1.72	0.22
4月	-0.43	1.40	0.04
5月	-0.44	1.05	0.08
6月	0.32	0.78	5.53
7月	0.84	1.04	21.75
8月	0.64	0.89	18.87
9月	-0.01	0.34	1.64
10月	-0.02	0.35	2.72
11月	-0.05	0.61	22.00
12月	-0.02	0.64	5.15
合計	2.06	11.68	86.12

表 6: 旅客データへの SSARMA モデルの適用 (母数に制約がある場合)

	季節ダミー	AR (12)	$\sigma_i^2$
1月	98.36 (341.80)	-0.21 (-1.91)	0.57
2月	98.01 (119.25)	0.55 (4.88)	1.58
3月	100.59 (132.26)	0.55 (4.88)	1.58
4月	99.95 (265.39)	-0.21 (-1.91)	1.58
5月	99.88 (363.69)	-0.21 (-1.91)	0.57
6月	102.50 (109.65)	0.55 (4.88)	0.57
7月	104.74 (136.46)	0.55 (4.88)	0.57
8月	104.49 (93.44)	0.55 (4.88)	0.57
9月	101.42 (367.70)	-0.21 (-1.91)	0.57
10月	98.48 (363.78)	-0.21 (-1.91)	0.57
11月	95.45 (173.73)	-0.21 (-1.91)	0.57
12月	97.87 (345.86)	-0.21 (-1.91)	0.57
AIC=399.66			

が大きくなっていることが見て取れる。したがって、母数に制約がない RegSSAR モデルよりも、よりパラメータを節約した時系列モデルの方が適切である可能性が考えられる。そこで係数と分散のパラメータに適切な制約条件を課した RegSSAR モデルの推定を行った。ここでは主に AIC 最小化基準に基づく試行錯誤の結果、RegSSARMA モデルのクラスの中から最も適切なものを選択したが、得られた時系列モデルの推定結果を表 6 に示しておく。

## 5 結論

本稿では、米国商務省センサス局の季節調整プログラム X-12-ARIMA において主要な役割を果たしている RegARIMA モデルに関する重要な問題を指摘した。季節和分を含む非定常な時系列を問題とすると、RegARIMA モデルにおける回帰部分の推定は、統計的時系列分析における標準的な議論に収まらなくなる。そこで季節 ARIMA モデルに従う誤差項を持つ回帰の問題に関して、回帰係数の  $t$  統計量の漸近分布を導いた。データ数が大きいときに極限として得られる分布は  $t$  分布や正規分布ではなく、ブラウン運動で表現される非正則な分布となっているので、こうした漸近分布をそのまま利用しようとするとは実用的にはその扱いがかなりやっかいになることが分かった。

次に季節転換 ARMA モデル (SSARMA) と RegSSARMA モデルなる季節時系列モデルのクラスを導入し、季節性の変動をより適切に表現することを考えた。また、この SSARMA モデルは季節性の持つ非線形な性質を表す単純な方法であることを示した。いくつかの実証分析からは、多くの現実の経済時系列の持つ季節性を表現するためには、比較的単純な SSARMA モデルのクラスを用いることで十分であろうと考えられる。ただし、SSARMA モデルでは母数の数がかかなり大きくなるので、母数空間に制約を入れることが考えられるが、その具体的な方法についてはなお改善の余地がある。

最後に残されたいくつかの問題について言及しておく。云うまでもなく、経済時系列の分析では季節性とともトレンドの分析も重要な問題であり、季節性とトレンドについて様々な組み合わせで統計的モデル分析を行う必要がある。例えば高岡 (2004) ではこの問題について分析を行っているが、マクロ経済時系列の多くの系列では明らかに非定常なトレンドが存在しているので、例えば非定常な確率的トレンドと SSARMA モデルによる季節性を組み合わせたモデルについて考察することは興味深い問題であろう。ここで、季節転換的な変動を含んだ時系列におけるトレンド関数のノンパラメトリックな推定は、トレンドのより柔軟な表現を考える上でも重要であるので、今後、さらに研究されるべき課題であろうと思われる。また、経済時系列分析ではトレンド成分、季節成分、不規則成分等とともに循環成分もまた重要である。循環成分をも考慮に入れた季節転換的な時系列分析はかなり複雑な様相を呈してくるので、ここでも新たな発想が求められてくることにも言及する必要がある。

## A 数学補論

この数学補論では本文中で結果を説明しその証明を省略した命題について、より詳しい導出の過程と数理的証明の概略を与える。

定理 2.1 および 定理 2.2 の証明の概略 :

[i] 最初に多項式について  $\phi_p(B) = \Phi_P(B^s) = 1, \theta_q(B) = \Theta_Q(B^s) = 1$  として離散時間の確率過程  $\{u_t\}$

$$(A.1) \quad (1 - B)^d(1 - B^s)^D u_t = v_t \quad (t = 1, 2, \dots),$$

を考える。ただし  $d \geq 1, D \geq 1, \sigma = 1$ 、確率変数列  $\{v_t\}$  は互いに独立に同一の分布にしたがい、初期条件は  $u_{-s} = 0 (s \geq 0)$  であると仮定する。

次に確率変数列を順次定義して、

$$(A.2) \quad u_t^{(k)} = u_{t-1}^{(k)} + u_t^{(k-1)} \quad (k = D + d, \dots, D)$$

及び  $u_t^{(0)} = v_t, u_t^{(1)} = (1 - B^s)^{-1} u_t^{(0)}, \dots, u_t^{(D)} = (1 - B^s)^{-1} u_t^{(D-1)}$  により構成する。このとき正整数の列  $[nu] \geq j_D \geq \dots \geq j_1 \geq 1 (0 < u < 1)$  に対して

$$(A.3) \quad u_{([nu]-1)s+i}^{(D)} = \sum_{[nu] \geq j_D \geq \dots \geq j_1 \geq 1} u_{j_1}^{(0)} = \sum_{j_D=1}^{[nu]} \sum_{j_{D-1}=1}^{j_D} \dots \sum_{j_1=1}^{j_2} u_{j_1}^{(0)} \quad (i = 1, \dots, s)$$

という表現を用いて

$$(A.4) \quad \sum_{j_D=1}^{j_{D+1}(T)} u_{j_D}^{(D)} = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{[j_{D+1}(T)]} u_{(j-1)s+i}^{(D)} + R(j_{D+1}(T))$$

と分解される。ここで、時点  $j_{D+1}(T)$  を  $T$  の関数として表現して剰余項と  $R(t(T))$  とできる。仮定により  $E[R(t(T))^2]$  が  $T$  の多項式となるのでその確率的次数が評価できる。また次の導出過程より初期条件を漸近的に無視できることを示すこともできる。ここで上の季節

による分解を  $u_{(j-1)s+i}^{(k)}$  ( $j \geq 1, k = 1, \dots, D, i = 1, \dots, s$ ) と  $u_j^{(D+l)}$  ( $j \geq 1, l = 1, \dots, d$ ) に代入すると、

$$(A.5) \quad u_t \sim u_t^* = \sum_{t \geq j_{D+d} \geq \dots \geq j_{D+1} \geq j_D} \sum_{i=1}^s \sum_{j_D \geq \dots \geq j_1 \geq 1} v_{(j_1-1)s+i}$$

なる表現を得る。このとき、弱収束の議論とタイトネス (tightness) 条件を用い

$$(A.6) \quad \frac{1}{T^{d+D-1}\sqrt{T}} u_{t(T)} = \left(\frac{1}{s}\right)^{D-\frac{1}{2}} \frac{1}{T^d} \frac{1}{n^{D-\frac{1}{2}}} u_{t(T)} \\ \xrightarrow{w} \left(\frac{1}{s}\right)^{D-\frac{1}{2}} \bar{B}^*\left(\left\lfloor \frac{t(T)}{T} \right\rfloor\right),$$

が得られるが<sup>8</sup>、ここで  $t(T)$  を  $T$  の関数として扱っていることに注意する。

次に連続写像定理と汎関数中心極限定理<sup>9</sup>を用いる。まず  $D = d = 1$  の場合には  $t = (j_2 - 1)s + i$  ( $j_2 \geq 2$ ) に対し

$$(A.7) \quad \sum_{t=1}^T \mathbf{z}_t u_t^{(2)} = \sum_{t=1}^T \mathbf{z}_t \{u_{(j_2-1)s+i-1} + \dots + u_{(j_2-1)s+1}\} + \sum_{j_1=1}^{(j_2-1)s} u_{j_1}^{(1)}$$

と書ける。仮定より例えば  $\sum_{t=1}^T \mathbf{z}_t u_{(j_2-1)s+i-1}$  の分散を評価すると  $O(T^3)$  であるので最終項に比べて漸近的には無視できることがわかる。同様な議論から近似的に

$$\frac{1}{T^2\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T \mathbf{z}_t u_t^{(2)} \cong \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{z}_t \left\{ \frac{1}{T\sqrt{T}} \sum_{j_1=1}^{(j_2-1)s} u_{j_1}^{(1)} \right\}$$

となること、各十分大きい  $j_2 (\geq 2)$  に対して初期値  $y_t = 0$  ( $t \leq 0$ ),  $\sum_{j_1=1}^{(j_2-1)s} u_{j_1}^{(1)} = \sum_{j_1=1}^{j_2-1} \sum_{i=1}^s (\sum_{j=1}^{j_1} u_{(j-1)s+i}^{(0)})$  及び  $\mathbf{E}[\sum_{j_1=1}^{(j_2-1)s} u_{j_1}^{(1)}]^2 \cong s \mathbf{E}[\sum_{j=1}^{j_2-1} u_{sj}^{(1)}]^2$ , ( $\mathbf{z}^*(r) = (1/s) \sum_{i=1}^s \mathbf{z}_i(r)$  ( $T = sn$ )) などに注意すると、左辺は  $T \rightarrow +\infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ) のときに

$$(1/s) \sum_{i=1}^s \int_0^1 \mathbf{z}_i^*(r) (1/\sqrt{s}) \bar{B}^*(r) dr$$

に収束することが分かる。 $D \geq 1, d \geq 1$  の場合も同様な議論により

$$(A.8) \quad \frac{1}{T^{d+D+\frac{1}{2}}} \sum_{t=1}^T \mathbf{z}_t u_t = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{z}_t \left[ \frac{1}{T^d n^{D-1} \sqrt{n}} u_t \right] \left[ \frac{1}{s} \right]^{D-\frac{1}{2}} \\ \xrightarrow{w} \left(\frac{1}{s}\right)^{D-\frac{1}{2}} \int_0^1 \mathbf{z}^*(r) \bar{B}^*(r) dr.$$

が導かれる。

また  $\{\mathbf{z}_t\}$  に関する条件

$$(A.9) \quad \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{z}_t \mathbf{z}_t' = \left(\frac{1}{s}\right) \sum_{i=1}^s \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{z}_{(j-1)s+i} \mathbf{z}_{(j-1)s+i}' \\ \rightarrow \mathbf{M}^* = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \mathbf{M}_i > 0,$$

<sup>8</sup>ここで  $\xrightarrow{w}$  は確率測度の弱収束 (weak convergence) の意味であるが、より詳細な数理的議論は例えば Tanaka (1996) の定理 3.1 と同様である。

<sup>9</sup>これらの確率論的な内容についての詳細な議論は例えば Billingsley (1968) を参照されたい。

とタイトネス (tightness) 条件により、

$$(A.10) \quad \frac{1}{T^{d+D-\frac{1}{2}}}(\hat{\beta}_{LS} - \beta) = \left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{z}_t \mathbf{z}_t'\right)^{-1} \left[\frac{1}{T^{d+D+\frac{1}{2}}} \sum_{t=1}^T \mathbf{z}_t u_t\right] \\ \xrightarrow{w} \left(\frac{1}{s}\right)^{D-\frac{1}{2}} \mathbf{M}^{*-1} \int_0^1 \mathbf{z}^*(r) \bar{B}^*(r) dr,$$

が得られる。ただし  $\hat{\beta}_{LS} = (\hat{\beta}_k)$  は未知母数ベクトル  $\beta = (\beta_k)$  の最小二乗推定量である。

さらに同様の議論により  $n \rightarrow \infty$  ( $T \rightarrow \infty$ ) のとき

$$(A.11) \quad \left(\frac{1}{T}\right)^{2(d+D)} \sum_{t=1}^T u_t^2 = \left(\frac{1}{s}\right)^{2(D+d-\frac{1}{2})} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left[\frac{1}{T^{d+D-\frac{1}{2}} \sqrt{n}} u_t\right]^2 \\ \xrightarrow{w} \left(\frac{1}{s}\right)^{2(D-\frac{1}{2})} \int_0^1 \bar{B}^{*2}(r) dr,$$

および

$$\left(\frac{1}{T}\right)^{2(d+D)} \sum_{t=1}^T \hat{u}_t^2 \xrightarrow{w} \left(\frac{1}{s}\right)^{2(D-\frac{1}{2})} \left[ \int_0^1 \bar{B}^{*2}(r) dr - \left( \int_0^1 \mathbf{z}^*(r) \bar{B}^*(r) dr \right)' \mathbf{M}^{*-1} \left( \int_0^1 \mathbf{z}^*(r) \bar{B}^*(r) dr \right) \right]$$

という結果が得られる。ただし  $\hat{u}_t$  ( $t = 1, \dots, T$ ) は最小二乗法から得られる残差系列を意味する。

以上のように  $n \rightarrow \infty$  ( $T \rightarrow \infty$ ) のときのランダムな項の評価を総合し、最終的に定理 2.1 で示した弱収束の結果

$$(A.12) \quad \frac{1}{\sqrt{T}} t(\beta_k) \xrightarrow{w} t_k^*$$

が得られる。

[ii] 次に  $d = 0$  の場合にはこの結果に若干の変更を加えることで定理 2.2 が導かれる。例えば式 (A.5) はより簡単な形の

$$(A.5)' \quad u_t \sim u_t^* = \sum_{\left[\frac{t(T)}{s}\right] \geq j_D \geq \dots \geq j_1 \geq 1} v_{(j_1-1)s+i}$$

に ( $t = \left[\frac{t(T)}{s}\right] - 1$ )  $s + i$  ( $i = 1, \dots, s$ ) 置き換えればよい。

また式 (A.8) は

$$(A.7)' \quad \frac{1}{T^{D+\frac{1}{2}}} \sum_{t=1}^T \mathbf{z}_t u_t \xrightarrow{w} \left(\frac{1}{s}\right)^{D+\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^s \int_0^1 \mathbf{z}_i(t) \bar{B}_i(t) dt.$$

に置き換えればよい。

またここから先の導出は  $d \geq 1$  の場合と完全に平行した議論になるので、詳細については省略する。

[iii] 残りの証明は弱従属過程の弱収束に関する標準的な結果と同様である。一般的な場合には式 (2.11) の分子と分母の両方を  $\sigma$  で割り、初期条件は漸近的に無視し得ることを示す必要がある。

ここで特性多項式  $\phi_p(B) = 0, \Phi_P(B^s) = 0, \theta_q(B) = 0, \Theta_Q(B^s) = 0$  の根の絶対値が 1 より大きいとの仮定の下では  $\beta_0 = 1$  および  $\beta_j = O(\rho^j)$  ( $|\rho| < 1$ ) を示すことは容易である。ただし、確率過程  $u_t$  の移動平均表現を

$$(A.13) \quad u_t = \sum_{t \geq j_{D+d} \geq \dots \geq j_{D+1}} \sum_{i=1}^s \sum_{\lfloor \frac{j_{D+1}}{s} \rfloor \geq j_D \geq \dots \geq j_1 \geq 1} u_{(j_1-1)s+i}^{(0)},$$

および

$$(A.14) \quad u_{(j_1-1)s+i}^{(0)} \sim u_{(j_1-1)s+i}^{(0)*} = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j v_{(j_1-1)s+i-j}$$

とした。以上より  $t$  値の分子と分母の両方で弱従属性 (weak dependence) の影響を調べることができるので一般的な場合の証明が可能となるが、かなり長い (しかし標準的な) 議論を行う必要があるので詳細は省略する。

定理 3.1 の導出 :

一般性を失うことなく季節ダミー変数を用い、 $\sum_{j=1}^s \beta_j z_{jt} = \sum_{j=1}^s a_j I_t^{(j)}$  と表記することにする。ここで  $I_t^{(j)}$  ( $j = 1, \dots, s$ ) は季節指示関数である。ここでは煩雑さを避けるために  $p \geq 1, P \geq 1, r \geq s$  および  $1 \leq p < s$  の場合について考察する<sup>10</sup>。このとき  $(s+p)$  次元の状態ベクトル  $\{\mathbf{Y}_j\}$  は

$$(A.15) \quad \mathbf{Y}_j = [\mathbf{I}_{s+p} - \mathbf{D}_0] \mathbf{a} + \mathbf{D}_0 \mathbf{Y}_j + \mathbf{D}_1 \mathbf{Y}_{j-1} + \sum_{i=2}^P \mathbf{B}_i^* \mathbf{Y}_{j-i} - \sum_{i=1}^P \mathbf{A}_i \mathbf{Y}_{j-i} + \mathbf{V}_j$$

というベクトル表現をすることができる。ただし、誤差項

$\mathbf{V}'_j = (\sigma_s v_{(j-1)s+s}, \dots, \sigma_1 v_{(j-2)s+1}, 0, \dots, 0)$  は  $(s+p) \times 1$  の確率変数ベクトルであり、 $\mathbf{a}' = (a_s, \dots, a_{-p+1})$  は  $(s+p) \times 1$  の定数ベクトルを表している。また、 $\mathbf{B}_j = \text{diag}(\Phi_j^{(s)}, \dots, \Phi_j^{(1)})$  ( $j = 1, \dots, P$ ) は  $s \times s$  対角行列であり、

$$(A.16) \quad \mathbf{D}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_s & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_j^* = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_j & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D}_0 = \begin{pmatrix} 0 & \phi_1 & \dots & \phi_p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1 & \dots & \phi_p & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & & & \\ & & & & 0 & \phi_1 & \dots & \phi_p \\ & & & & \vdots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & & \ddots & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

<sup>10</sup> なお季節ダミー変数が含まれない場合には、状態ベクトルやその他の表記を適切に変更すればよい。また、 $s \leq p < 2s$ , となる場合にも以下と同様の議論を行うことができる。例えば  $2s + (p-s)$  次元ベクトルの組を構成し、それに対応した適当な変更を加えれば良いが、こうした場合でも本質的な議論はここで与えたケースと同様である。

$$\mathbf{A}_i = \begin{pmatrix} 0 & \phi_1 \Phi_i^{(s-1)} & \cdots & \phi_p \Phi_i^{(s-p)} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1 \Phi_i^{(s-2)} & \cdots & \phi_p \Phi_i^{(s-p-1)} & \cdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \cdots \\ & & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & & & \ddots & & \phi_1 \Phi_i^{(1)} & \cdots & \phi_p \Phi_i^{(s-p)} & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & 0 & \phi_1 \Phi_i^{(s)} & \cdots & \phi_p \Phi_i^{(s-p+1)} \\ 0 & \vdots & & & & & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & & 0 & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & & & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

および

$$\mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{I}_p & \mathbf{O} \end{pmatrix}$$

は  $(s+p) \times (s+p)$  行列である。

時系列モデルのこうしたベクトル表現は一見複雑に見えるが、特性方程式に関する次の結果を利用することができる。

補助定理 A.1 : 式 (A.14) で定義されるベクトル AR 過程の特性方程式は

$$(A.17) \quad c(\lambda) = |\lambda^P [\mathbf{I}_{s+p} - \mathbf{D}_0] - \lambda^{P-1} [\mathbf{D}_1 - \mathbf{A}_1] - \sum_{i=2}^P \lambda^{P-i} [\mathbf{B}_i^* - \mathbf{A}_i]| = 0.$$

により表現される。このとき次の等式が成り立つ<sup>11</sup>。

$$(A.18) \quad c(\lambda) = \lambda^{p(P-1)} \prod_{i=1}^p (\lambda - \rho_i^s) \prod_{i=1}^s [\lambda^P - \lambda^{P-1} \Phi_1^{(i)} - \cdots - \Phi_p^{(i)}],$$

ただし  $\rho_i$  ( $i = 1, \dots, p$ ) は方程式

$$(A.19) \quad \lambda^p - \lambda^{p-1} \phi_1 - \cdots - \phi_p = 0.$$

の解である。

補助定理 A.1 の証明 :

補助定理 A.1 は次に述べる補助定理 A.2 から簡単に導くことができる。一般の場合には記号が複雑になるので  $P = p = 2$  の場合についての証明を与えておく。ここで特性多項式 (A.16) は  $(s+2) \times (s+2)$  行列の行列式で  $\lambda$  についての  $2s+2$  次多項式となることに注意する。2 次多項式  $a_j(\lambda) = \lambda^2 - \Phi_1^{(j)} \lambda - \Phi_2^{(j)}$  ( $j = 1, \dots, s$ ) を用いると

$$c(\lambda)$$

<sup>11</sup>レフェリーにより  $\lambda^{p(P-1)}$  項の指摘及び補助定理 A.1 の別証明が与えられたのでレフェリーには特に感謝する。ここでは補助定理 A.2 を経由した証明そのものにも興味がある読者も想定して元の証明のアイデアを少し修正した議論を用いている。



$$\begin{aligned}
&= \left| \begin{pmatrix} a_s(\lambda) & -\phi_1 a_{s-1}(\lambda) & -\phi_2 a_{s-2}(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{s-1}(\lambda) & -\phi_1 a_{s-2}(\lambda) & -\phi_2 a_{s-3}(\lambda) & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 & a_1(\lambda) & -\phi_1 a_s(\lambda) & -\phi_2 a_{s-1}(\lambda) \\ -\lambda^{P-1} & 0 & \cdots & \vdots & 0 & \lambda^P & 0 \\ 0 & -\lambda^{P-1} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \lambda^P \end{pmatrix} \right| \\
&= \lambda^{p(P-1)} \left| \begin{pmatrix} a_s(\lambda) & -\phi_1 a_{s-1}(\lambda) & -\phi_2 a_{s-2}(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{s-1}(\lambda) & -\phi_1 a_{s-2}(\lambda) & -\phi_2 a_{s-3}(\lambda) & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 & a_1(\lambda) & -\phi_1 a_s(\lambda) & -\phi_2 a_{s-1}(\lambda) \\ -1 & 0 & \cdots & \vdots & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| \\
&= \lambda^{p(P-1)} \left| \begin{pmatrix} a_s(\lambda) & -\phi_1 a_{s-1}(\lambda) & -\phi_2 a_{s-2}(\lambda) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{s-1}(\lambda) & -\phi_1 a_{s-2}(\lambda) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \cdots & 0 & 0 \\ -\phi_2 a_s(\lambda)/\lambda & 0 & \cdots & \ddots & -\phi_1 a_1(\lambda) & -\phi_2 a_s(\lambda) & 0 \\ -\phi_1 a_s(\lambda)/\lambda & -\phi_2 a_{s-1}(\lambda)/\lambda & \cdots & 0 & a_1(\lambda) & -\phi_1 a_s(\lambda) & -\phi_2 a_{s-1}(\lambda) \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| \\
&= \lambda^{p(P-1)} \times \left[ \prod_{j=1}^s a_j(\lambda) \right] \times \left| \begin{pmatrix} 1 & -\phi_1 & -\phi_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -\phi_1 & -\phi_2 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \\ 0 & \vdots & & \ddots & 1 & -\phi_1 & -\phi_2 \\ -\phi_2 & 0 & \cdots & & 0 & \lambda & -\lambda\phi_1 \\ -\phi_1 & -\phi_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right|
\end{aligned}$$

となる。ただし、ここで行列の基本変形を繰り返し適用したが、最後の変形は  $(s+p) \times (s+p)$  行列の行列式を  $s \times s$  行列の行列式に帰着させたことに注意する。さらに、最後の右辺に現れた  $s \times s$  ( $s > p$ ) 行列の左下部分の  $p \times p$  行列をゼロ行列に変換する行列変形により次の補助定理 A.2 を用いると求める結果を得ることができる。

(Q.E.D)

補助定理 A.2 :  $s \times s$  行列 ( $s > p$ ) の行列式に関して次の関係が成立する。

$$(A.20) \quad \begin{vmatrix} 1 & -\phi_1 & \cdots & -\phi_p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -\phi_1 & \cdots & -\phi_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & & & \\ 0 & \cdots & & 1 & -\phi_1 & -\phi_2 & \cdots & -\phi_p \\ -\phi_p & \cdots & 0 & 0 & \lambda & -\lambda\phi_1 & \cdots & -\lambda\phi_{p-1} \\ \vdots & & & & \ddots & & & \vdots \\ -\phi_2 & \cdots & & & & 0 & \lambda & -\lambda\phi_1 \\ -\phi_1 & \cdots & -\phi_p & 0 & \cdots & & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^p (\lambda - \rho_i^s) .$$

ただし実数  $\rho_i$  ( $i = 1, \dots, p$ ) は方程式  $\lambda^p - \lambda^{p-1}\phi_1 - \cdots - \phi_p = 0$  の根である。

補助定理 A.2 の証明 :

$s \times s$  ( $s > p$ ) 行列の基本変形を用いて左上 (非対角) 要素を全てゼロに変形する。その結果として得られる行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 0 & 1 & & 0 \\ \mathbf{c}_1 & \cdots & & \mathbf{c}_{s-(p-1)} & \cdots & \mathbf{c}_s \end{pmatrix}$$

と書ける。ただし行列の下側は  $p \times 1$  ベクトル  $\{\mathbf{c}_j\}$  ( $j = 1, \dots, s$ ) を用いて表現したので、問題は  $p \times p$  行列  $(\mathbf{c}_{s-(p-1)}, \dots, \mathbf{c}_s)$  の行列式を求めることに帰着される。ここで行列の基本変形により  $\mathbf{c}'_s = (-\phi_{p-1}\lambda, \dots, -\phi_1\lambda, \lambda) + \phi_1\mathbf{c}'_{s-1} + \cdots + \phi_p\mathbf{c}'_{s-p}$ ,  $\mathbf{c}'_{s-1} = (-\phi_{p-2}\lambda, \dots, -\phi_1\lambda, \lambda, 0) + \phi_1\mathbf{c}'_{s-2} + \cdots + \phi_p\mathbf{c}'_{s-p-1}$ ,  $\dots$ ,  $\mathbf{c}'_{s-(p-1)} = (\lambda, 0, \dots, 0) + \phi_1\mathbf{c}'_{s-(p-2)} + \cdots + \phi_p\mathbf{c}'_{s-(2p-1)}$  であることに注意しておく。さらにベクトル  $\{\mathbf{c}_j; j = 1, \dots, s-p\}$  は

$$(A.21) \quad \mathbf{c}_j = \phi_1\mathbf{c}_{j-1} + \cdots + \phi_p\mathbf{c}_{j-p} \quad (j = 1, \dots, s-p) ,$$

なる差分方程式を満たすものとして定義できる。また初期値は  $(\mathbf{c}_{-p+1}, \dots, \mathbf{c}_0) = (-1)\mathbf{I}_p$  とする。このとき、任意の  $j = 1, \dots, s-p$  に対して

$$(A.22) \quad (\mathbf{c}_{-p+1+j}, \dots, \mathbf{c}_j) = (\mathbf{c}_{-p+j}, \dots, \mathbf{c}_{j-1}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \phi_p \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & \phi_{p-1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \phi_{p-2} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 1 & \phi_1 \end{pmatrix}$$

と書けることに注意する。したがって、差分方程式を用いて  $\mathbf{c}_j$  ( $j = -p+1, \dots, s$ ) についての代入を繰り返して得られる表現を整理すると  $p \times p$  行列  $(\mathbf{c}_{s-p+1}, \dots, \mathbf{c}_s)$  は

$$(A.23) (\mathbf{c}_{s-p+1}, \dots, \mathbf{c}_s) = \lambda \mathbf{I}_p + (\mathbf{c}_{-p+1}, \dots, \mathbf{c}_0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \phi_p \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & \phi_{p-1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \phi_{p-2} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 1 & \phi_1 \end{pmatrix}^s$$

と表現される さらに  $p \times p$  行列である (A.22) の行列式を計算すると、 $\{\mathbf{c}_j\}$  に関する初期条件を用いることで

$$(A.24) \quad |\mathbf{c}_{s-p+1}, \dots, \mathbf{c}_s| = \left| \lambda \mathbf{I}_p - \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \phi_p \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & \phi_{p-1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \phi_{p-2} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 1 & \phi_1 \end{pmatrix} \right|^s$$

となることがわかる。右辺の行列の固有値は  $\rho_i^s$  ( $i = 1, \dots, p$ ) であるので式 (A.20) の関係が得られる。

(Q.E.D)

定理 3.1 の導出 (続き) :

補助定理 A.1 により、定理 3.1 における安定条件は (A.16) の全ての特性根の絶対値が 1 より小さいということと同値であることがわかる。したがって、時系列分析の標準的な議論 (例えば Anderson (1971) の第 5 章を参照) に従えば、ただちに定理を得ることができる。

(Q.E.D.)

定理 3.2 の証明 :

まず式 (3.4) 両辺に  $I_t^{(i)}$  を掛けて期待値をとる。すると安定条件の下で

$$(A.25) \quad \mu_i = \mathbf{E}[y_t I_t^{(i)}] = \frac{a_i}{1 - b_i} \quad (i = 1, \dots, s)$$

が得られる。このとき定常過程についてのエルゴード定理 (例えば Anderson (1971) の ch.8 の議論が利用できる) より、 $n \uparrow +\infty$  に対して

$$(A.26) \quad \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \left[ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_{(j-1)s+i} \right] \xrightarrow{p} \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \mu_i = \bar{\mu}$$

が成り立つ。同様の議論により、 $y_t^2$  に対して  $I_t^{(i)}$  を掛けて期待値をとることで、

$$(A.27) \quad \mathbf{E}[y_t^2 I_t^{(i)}] = \frac{1}{1 - b_i^2} [a_i^2 + \sigma_i^2 + 2a_i b_i \mu_i]$$

が得られるので、 $n \uparrow +\infty$  に対して

$$(A.28) \quad \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t^2 = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \left[ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_{(j-1)s+i}^2 \right] \xrightarrow{p} \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \left[ \frac{a_i^2 + \sigma_i^2 + 2a_i b_i \mu_i}{1 - b_i^2} \right]$$

が成り立つ。さらに  $a_i = (1 - b_i)\mu_i$  ( $i = 1, \dots, s$ ) という関係を利用すると、 $n \uparrow +\infty$  に対して

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})^2 &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t^2 - \bar{y}^2 \\
 &\xrightarrow{p} \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \frac{\sigma_i^2}{1 - b_i^2} + \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \frac{a_i(a_i + 2b_i\mu_i)}{1 - b_i^2} - \bar{\mu}^2 \\
 \text{(A.29)} \quad &= \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \frac{\sigma_i^2}{1 - b_i^2} + \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s (\mu_i - \bar{\mu})^2
 \end{aligned}$$

となる。また

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (y_{t-s} - \bar{y}_{-s})(y_t - \bar{y}) \\
 \text{(A.30)} \quad &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (y_{t-s} - \bar{\mu}) \left[ \sum_{i=1}^s (a_i + b_i y_{t-s} + \sigma_i v_t) - \bar{\mu} \right] + o_p(1)
 \end{aligned}$$

となることも同様にわかる。以上の計算から自己回帰 (AR) モデルを当てはめた時に得られる係数に対する最小二乗推定量の分子の極限 ( $n \uparrow +\infty$ ) は

$$\begin{aligned}
 &\sum_{i=1}^s a_i \mathbf{E} \left[ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (y_t - \bar{\mu}) I_t^{(i)} \right] + \sum_{i=1}^s b_i \mathbf{E} \left[ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (y_{t-s} - \bar{\mu}) y_{t-s} I_t^{(i)} \right] \\
 &= \sum_{i=1}^s a_i \left( \frac{\mu_i - \bar{\mu}}{s} \right) + \sum_{i=1}^s b_i \left[ \frac{1}{s} \frac{a_i^2 + \sigma_i^2 + 2a_i b_i \mu_i}{1 - b_i^2} - \bar{\mu} \frac{\mu_i}{s} \right] \\
 \text{(A.31)} \quad &= \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \frac{b_i \sigma_i^2}{1 - b_i^2} + \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s (\mu_i - \bar{\mu})^2,
 \end{aligned}$$

と評価される。ただし、ここで  $a_i = (1 - b_i)\mu_i$  ( $i = 1, \dots, s$ ) という関係を用いたことを注意しておく。このことから定理の主張する結果 (3.15) が得られる。

(Q.E.D.)

## 引用文献

- [1] Akaike, H. (1973), "Information Theory and an Extension of the Maximum Likelihood Principle," in Petrov, B.N. and Csaki, F. eds., *Second International Symposium on Information Theory*, Akademia Kiado, Budapest, 267-281.
- [2] Anderson, T.W. (1971), *The Statistical Analysis of Time Series*, John-Wiley.
- [3] Anderson, T.W. and Kunitomo, N, (1992), "Asymptotic Distributions of Regression and Autoregression Coefficients with Martingale Differences," *Journal of Multivariate Analysis*, Vol. 40-2, 221-243.
- [4] Billingsley, P. (1968), *Convergence of Probability Measures*, John-Wiley.
- [5] Box, G.E.P. and Jenkins, G.M (1971), *Time Series Analysis : Forecasting and Control*, Holden-Day.
- [6] Findley, D., B. Monsell, W.R.Bell, M.Otto, and B. Chen (1998), "New Capabilities and Methods of the X-12-ARIMA Seasonal Adjustment Program," *Journal of Business and Economic Statistics*, **16**, 127-177.
- [7] Franses, P. H. (1996), *Periodicity and Stochastic Trends in Economic Time Series*, Oxford University Press.
- [8] Ghysels, E. and D.R. Osborn (2001), *The Econometric Analysis of Seasonal Time Series*, Cambridge University Press.
- [9] Hamilton, J. (1994), *Time Series Analysis*, Princeton University Press.
- [10] 北川源四郎 (1993), 「時系列プログラミング」, 岩波書店。
- [11] 国友直人 (2001), "季節調整法 X-12-ARIMA(2000) の利用 : 法人企業統計の事例", *経済学論集*, Vol. 67-2, 2-29, 東京大学経済学部。
- [12] 国友直人編 (2004) 「解説 X-12-ARMA(2002)」, 東京大学日本経済国際共同研究センター (CIRJE) 研究報告 No.1。
- [13] Kunitomo, N. and M. Takaoka (2002), "On RegARIMA Model, RegSSARMA Model and Seasonality", Discussion Paper CIRJE-F-146, Graduate School of Economics, University of Tokyo (<http://www.e.u-tokyo.ac.jp/cirje/research/dp/2001/>).
- [14] Ikeda, N. and Watanabe, S. (1989), *Stochastic Differential Equation and Diffusion Processes*, North-Holland.
- [15] Shiskin, J., Young, A.H., and Musgrave, J.C. (1967), "The X-11 Variant of the Census Method II Seasonal Adjustment Program," Technical Paper 15, Bureau of the Census, U.S. Department of Commerce, Washington DC.
- [16] 統計数理 (1997) 「季節調整特集」, 統計数理研究所。
- [17] 高岡慎 (2004), 季節性と経済時系列分析, 東京大学大学院経済学研究科学位 (博士) 論文。
- [18] Tanaka, K. (1996), *Time Series Analysis*, John-Wiley.