

Abstract

「変額年金保険の理論と実際」

“On Risk Management Methods of Equity-Linked Insurance and Practical Problems”

Recently the various types of the equity-linked insurance have been introduced and actively traded in Japanese insurance markets. We investigate the basic problems of the actuarial risk management methods for those products based on the Markovian regime-switching time series model, which was originally proposed by Hamilton (1989) and applied to the insurance problem by Hardy (2001, 2003).

We argue that they should be carefully used in Japan mainly because the macro-economic performance of Japan in the past decades have been quite different from the macro-economies of Canada and U.S..

変額年金保険の理論と実際*

秋山豪太[†]

国友直人[‡]

2005年9月30日

概要

生命保険業界では変額年金保険が近年における一つの大きな話題として注目されている。変額年金保険では保険契約者が何らかの最低保障を受けられるが、生命保険会社にとってはそのリスク管理が問題となる。本稿では変額年金保険に関する局面転換対数正規 (RSLN) モデルと呼ばれている、一種の隠れマルコフ (Hidden Markov) モデルを利用したリスク管理法の理論と実際の問題を議論する。特にこの間に日本が経験した米国・カナダなどかなり異なる様相のマクロ経済の動向に依存して、既存のリスク管理法を応用するとき生じうる問題点を指摘し、改善可能性を議論する。

鍵言葉

変額年金保険、最低保障、局面転換対数正規 (RSLN) モデル、隠れマルコフ (Hidden Markov) モデル、VaR、裾条件付期待値 (CTE)、長期リスク管理問題

*この論文は2005年9月に日本統計学会・統計関連学会連合大会(広島)及び2005年10月のJARIP大会(東京)において報告した内容をまとめたものである。なお、この論文の内容は三井アセット信託銀行の見解を示すものではない。

[†]三井アセット信託銀行

[‡]東京大学大学院経済学研究科

1 はじめに

近年になり日本の生命保険業においても変額年金保険を巡る議論がかなり大きな話題になっている。日本の生命保険市場では従来から伝統的に存在しているタイプの生命保険の契約が低迷している中で、変額年金と呼ばれている年金保険の金融契約が急速に拡大を遂げている。変額年金保険は、その特徴として契約保有者が何らかの最低保証を受けられると同時に、支払った保険料の運用益も享受できる仕組みになっている点で従来の生命保険とは異なるといえる。しかし、他方で生命保険会社は株式市場などの金融市場で資金を運用していく中で、もしも運用結果が支払保証を下回った場合には、保険会社としては将来に損失が発生する可能性があるため、変額年金保険の販売は保険会社にとっては大きなリスクの源泉となりうる。特に生命保険のリスクを社会的に制御する仕組みとして機能している責任準備金の積み立て額の評価方法も重要な問題となる。いずれの方法をとるにしても、生命保険会社は何らかの統計学的方法でリスクを計測し、変額年金保険の販売から将来に生じうるリスクを制御することが必要である。

変額年金保険、より一般的にはエクイティリンク型保険と呼ばれる年金保険はこの間にアメリカやカナダなど北米諸国を中心として既にかかなりの販売実績がある。日本の生命保険業界においても、近年では様々な形で販売されており、成長が著しい年金保険の新しい動きの原動力となっている。こうした年金保険を巡る実務界の動向を反映して、北米のアクチュアリー（保険数理人）などの関係者を中心に、変額年金保険のリスクの測定に関しての理論が新たな展開を見せている。そこでの議論は従来より伝統的に存在している保険数理の枠組みとはかなり異なる形で進んでおり、変額年金保険のリスク管理論を巡る新たな問題が注目されている。特に RSLN(regime switching long-normal) モデル、すなわち局面転換対数正規モデルと呼ばれている一種の隠れマルコフ (Hidden Markov) タイプの統計的時系列モデルによる変額年金保険のリスク測定が北米では盛んに行われるようになっている。ここで局面転換モデルと呼ばれている統計的モデルとはデータがしたがっていると想定される状態変数がある時刻に属する局面 (レジューム) や分布が時間とともに転換 (あるいは変化) していく時系列モデルであるのがその最大の特長である。こうした隠れマルコフ型時系列モデルによるリスク管理の方法について、日本の生命保険関係者も注目するようになっている。(例えば田中・松山 (2004) を参照。)

本稿ではこうした変額年金保険を巡る議論でもっとも重要と考えられる、局面転換 (RS) モデルによる変額年金保険のリスク評価法に焦点をあてる。特に統計的モデルとしての局面転換 (RS) モデルの統計的性質を明らかにする。さらにより重要な問題として、カナダや米国で議論されているリスク管理方法が日本のデータにおいて実証的に支持されるかという論点について考察する。そして局面転換 (RS) モデルを用いた日本における変額年金保険のリスクについての分析結果を報告する。我々の分析によれば、この間に経験した日本のマクロ経済変動を踏まえると、カナダや米国のデータ分析にもとづく変額年金のリスク評価をそのまま日本に適用すると、リスクを巡る幾つかの基本的な問題が生じるので、慎重に様々な統計的方法を利用し、当面の問題を解決すべきであるとの結論を得た。

あらかじめ本稿の構成を説明しておく、まず次節では、変額年金保険、エクイティリンク型保険について一般的な説明を行う。次に 3 節では隠れマルコフ型の統計的時系

列モデルとしての局面転換 (RS) モデルの統計的モデルとしての性質を調べる。特に定常分布、自己共分散関数、同時密度関数などを考察する。さらに、変額年金保険のリスク評価に対して局面転換 (RS) モデルを利用した日本とカナダのデータ解析の結果を示す。さらに4節では推定したパラメーターを利用したシミュレーションを利用して、責任準備金の評価を行う。その際、VaR(バリュー・アット・リスク)やCTE(裾条件付期待値)などのリスク評価基準についても議論する。最後に5節では、本稿で得られた結論をまとめる。

2 変額年金保険とは?

一般に保険の目的は保険契約者とその家族に経済的な不安をなくす手段を与えることである。従来型の生命保険では、保険契約者の生存、死亡を条件として保険支払いがなされるものであり、保険契約者は、保険が適用される権利を得るために契約した期間に保険料を支払うことになっている。こうした従来型の保険を扱う生命保険会社の業務では、死亡率や疾病率といったリスクの調査及び管理に焦点が当てられていることは当然であろう。他方、保険会社の投資の面では、年金保険において保証している年金給付金は、固定された金利での運用でカバーできるという予定利率の考え方があり、年金保険の運用面は主要なリスクの源泉とは必ずしも見なされてこなかった。

しかしながら、近年では世界中の保険市場を取り巻く環境も急激に変化してきている。特に生命保険分野に関係する新たな投資機会として、投資信託型の運用手段の認知がこの間により高まってきている。こうした資金運用を生命保険に組み込む理由としては、例えば生命保険の契約者が死亡保証を望む一方、投資の運用益も享受したいと考えるようになってきていることなどが背景として考えられる。そうした生命保険を取り巻く環境が変化する中で、世界中の主要な生命保険会社は投資とリンクした年金保険契約を進展させてきている¹。

例えばイギリスでは、投資信託タイプの投資がついた死亡時と満期時において最低支払額が保証されている契約が実は典型的な年金生命保険として存在していた。ユニット・リンク保険 (unit-linked insurance) と呼ばれているこの種の年金保険契約が1960年代後半から1970年代後半にかけては広汎に販売されていたのである。米国では変額年金 (variable annuities、略してVA) やエクイティ年金 (EIA:equity-indexed annuities) が開発されている。カナダでは、満期時あるいは死亡時に支払いが保証されている、個別分離ファンド契約 (segregated fund contracts) と呼ばれる年金保険が1990年代後半にかなりの販売実績をおさめている。こうした新しい年金保険契約について本稿ではエクイティリンク型保険² (equity-linked insurance)、分離勘定型保険 (separate account insurance)、という用語を用いることにする。前者は、株式指標のパフォーマンスによって保証額が決まるあらゆる契約を指すものとする。また後者は、変額年金、個別分離ファンド、ユニット・リンク保険を含めた商品の集合を指すものとする。これらの金融契約においては、保険料の一部、もしくは全てが投資信託と似たエクイティ・ファンドに投資されることが

¹同問題に関する日本アクチュアリー会の説明 (<http://www.actuaries.jp/info/hennen.html>) が参考となる。

²日本ではこれを変額年金保険と呼んでいる。

一般的である。この種のファンドは分離勘定³として一般の保険とは区別して扱われ、年金保険契約者への運用益の主要部分を形成している。こうした分離勘定型の商品を販売する場合には、生命保険会社にとっては、市場における資金運用の動向が直接的にリスクの源泉となるので、重要なリスク管理の問題を生じさせることになる。

ここで主なエクイティリンク型保険のタイプについて簡単に説明しておく。エクイティリンク型保険としては、最低年金原資保証 (GMMB:Guaranteed Minimum Maturity Benefit)、最低死亡給付金保証 (GMDB:Guaranteed Minimum Death Benefit)、最低解約返戻金保証 (GMSB:Guaranteed Minimum Surrender Benefit)、最低年金額保証 (GMIB:Guaranteed Minimum Income Benefit) というの4つのタイプに大別することができる。このうち最低年金原資保証とは、契約の満期時に特定の金額を保険契約者に対して保証する契約である。この保証によって、保険契約者はファンドが原資を下回ることを回避できる一方で、運用先である株式指数の上昇の恩恵も受けることができる。最低死亡給付金保証とは、契約期間内における死亡時に特定の金額を保険契約者に対して保証する契約である。また、最低解約返戻金保証とは、あらかじめ決められた期間を超えると、解約時に支払われる返戻金が保証される契約である。最低年金額保証とは、分離ファンドで積み立てられた一括給付金を、保証された利率で年金にしてもよいということを保証する契約である。

次に実際に販売されている年金保険契約のタイプについても言及しておこう。ここでは具体例として、ユニットリンク保険 (イギリス)、変額年金 (アメリカ)、エクイティ年金 (アメリカ)、個別分離ファンド契約 (カナダ)、エクイティリンク型保険 (ドイツ)などを挙げておこう。このうちユニットリンク保険は、保険料100%の最低年金原資保証と最低死亡給付金保証を保証する契約として販売されていたが、現在のほとんどの契約では最低死亡給付金保証のみを保証している。また、満期時においてファンドを保証された利率で年金にしてもよい、という年金オプションのついたものも販売されているようである。変額年金では、保険料はサブ勘定 (subaccounts) に投資されるのが一般的であろう。最低死亡給付金保証が標準的な変額年金保険契約の特徴であるが、数年前まで標準的ではなかった最低年金原資保証なども、近年では標準的な契約となり始めているなど流動的である。

エクイティ年金は、基礎をなす指数の上昇時に、ある定められた利率で上昇する機会を提供している。例えば、もし運用している指数が10%上がったのならば、保険契約者に帰する利子率は8%になる、というのが典型例であろう。この種の保険契約では、元の保険料に一定の固定された利率での最低支払いを保証し、例えば年利3%などすることが北米の例にある。また、解約時の給付額が固定しているのが標準的契約であるが、その他の保険契約の内容は各保険会社により様々な形態となっている。個別分離ファンド契約においては、保険料のほとんどが、一つもしくは複数の投資信託に投資されるのが一般的である。この種の保険契約では、少なくとも保険料の75%の最低年金原資保証と最低死亡給付金保証を備えており、100%であることもまれではない。むしろ、保険契約者はいつでも分離ファンドの一部もしくはすべてを解約してもよいが、早期の解約には違約金が生じることになる。生命保険会社は通常は、固定利率、固定利率とファンドの混合、あまりリスクの不高くないファンド、リスクが高く特殊なファンド、といったファンドの幅を提供していることが多い。また複数のファンドに投資した保険契約者に対し

³一般勘定から分離した勘定であり特別勘定とも言われることがある。

ては、その保証はそれぞれのファンドで別々に適用されるか、あるいは総合したリターンに基づいて契約が行われるようである。エクイティリンク型保険(ドイツ)は、エクイティ年金と似ており、保険料には最低保証利率が適応され、指数のパフォーマンスに応じた利率の上昇が連動するものもある。このようなドイツにおける保険契約では一年契約が標準的のようである。

ここで一般的に述べるならば、株式市場などの金融リスクの評価や管理は保険リスクの管理とは大きく異なっている。伝統的によく知られている保険リスクの管理の原理とは多くの保険契約から発生するリスクが分散されることをその基礎としている。個別の保険会社においても例えば何千単位の保険契約を持っていれば、生命現象そのものは互いの保険契約において(統計的に)ほぼ独立と見なすことができ、したがって、大数の法則と中心極限定理により、支払請求の総数についてかなり正確に予測することが可能である。すなわち、利子率の変動をとらえることができれば支払請求数の推定値を用いて、生命保険会社が直面する不確実性に充分に対応することが可能なのである。

しかしながら、エクイティリンク型保険が提供している保証においては、こうした従来の保険契約のリスク管理とはかなり違ったアプローチが要求されることになる。保険会社が運用している市場の指標が好ましくない状況になったとき、その影響は同時に保険会社が保有している多数の契約にもたらされる。最も単純な契約を例にとれば、保険加入の集団のすべての契約において、支払請求が同時に生じるか、あるいは全く生じない、ということになる。すなわち、伝統的な保険原理として知られている、多数の個人保険契約による単純な形で「大数の法則」や「中心極限定理」を適用することは困難となるのである。

そもそも、本来的にエクイティリンク型保険におけるリスクは、かなり極端な株価の変動というものに関係している。したがって、変額年金のリスク管理においてもっとも重要な分析の対象は、株価を確率変数の実現値としてとらえた時の株価の分布の裾、ということになる。

こうした変額年金保険を扱うリスク評価の実務では、これまで北米やイギリスの生命保険会社では従来型のアクチュリアル(保険数理的)・アプローチが取られている。ここで、アクチュリアル・アプローチとは、大まかに言えば年金保険契約の保証に備えて責任準備金の分布を定め、その分布の裾を評価して、責任準備金の額を決定する、という方法である。さらに、特に将来の株価の分布をとらえるために、この間の年金保険の実務において、局面転換対数正規(RSLS、regime-switching lognormal)モデルが用いられることが少なくない。

3 局面転換(RS)モデルの性質と応用

株価の収益率を説明する伝統的な確率過程モデルとしては、ファイナンス分野で著名なブラック・ショールズ・アプローチも含めて、株価が連続時間の幾何ブラウン運動にしたがうと仮定することが少なくない。この確率過程モデルが示唆するところは、いかなる離散的な時間の間隔に対して、対数差分で求めた株価の収益率は正規分布に従い、重なり合わない間隔における収益率は互いに独立である、ということになる。すなわち、 S_t

を時点 t における株価とすれば

$$(3.1) \quad \log \frac{S_t}{S_r} \sim N(\mu(t-r), \sigma^2(t-r)), \quad t > r$$

であり、未知母数は一定値をとる μ とボラティリティ σ である。この独立増分対数正規 ILN (independent lognormal model) モデルは単純で扱いやすく、比較的短い時間の間隔に関してはかなり良い近似を与えることがファイナンス分野では知られている。しかしながら、長期の問題を考える場合には適切でないことが多いと考えられる。例えばこのモデルでは現実の金融市場において時々観察されている極端な価格変動やボラティリティ母数の変動をとらえることが出来ない。

ボラティリティ変動をとらえる離散時間の統計的時系列モデルは近年では様々な方法が研究されているが、ここではボラティリティ水準が K 個 ($K > 1$) の離散的な値の間を変動し、離散的な値の間を確率的に転換するタイプの統計的時系列モデルを考えよう。こうしたタイプの統計モデルは一般的には ILN モデルの単純な面を維持しつつ、ILN モデルよりも現実に観察される収益率変動をより適切にとらえることが出来ることが期待できよう。特に $K = 2$ としたときに得られる離散時系列モデルの解釈としては、市場が時間の経過とともに安定的なボラティリティの低い状態と、不安定なボラティリティの高い状態とを推移するという、直観的ではあるが市場関係者の間に根強く存在する見方と整合的である。ここで高いボラティリティの状態は、例えば突発的に生じる大きな市場をとりまく不確実性に対応していると見る事ができよう。

異なる経済変動の局面をある種の確率的メカニズムで推移する、というタイプの統計的時系列モデルはこれまで様々な分野で応用されている。特に局面転換が観察不能な要因に基づきマルコフ的に生じるモデルは、統計的時系列解析 (statistical time series analysis) の分野ではマルコフ転換時系列モデルと呼ばれている。(例えば Kitagawa (1987) を参照。) 計量経済学においてこの種の局面転換モデルを導入したのは Hamilton (1989) であり、主としてマクロ経済分析における景気循環の複雑な時系列計量経済モデルとして利用されている。さらに、この種のマルコフ転換時系列モデルの中でも局面転換対数正規 (RSLN) モデルによる変額年金のリスク評価を提唱したのが Hardy (2001, 2003) であり、特に北米のアクチュアリー (保険数理人) の間で話題となっている。

ここでは各局面での収益率がしたがう分布として、特に対数正規分布に限ることなく、より一般の局面転換 (RS) モデルの性質を考察しておこう。局面転換 (RS) モデルを株価収益率に適用する場合には、各期において株価の収益率の過程が K 個の状態の局面 (レジャー) の一つにあると考えよう。ここで ρ_t で間隔 $[t, t+1)$ における局面 (レジャー) を表し、 $\rho_t = 1, 2, \dots, K$ 、 S_t は t におけるポートフォリオの総価値を表し、

$$(3.2) \quad \log \frac{S_{t+1}}{S_t} \Big| \rho_t \sim F(\mu_{\rho_t}, \sigma_{\rho_t}^2)$$

とする。ただし μ_{ρ_t} と $\sigma_{\rho_t}^2$ は各局面での平均 (期待値) とスケール (分散) を表すものとする。ここで、局面転換の推移確率行列 $\mathbf{P} = (p_{ij})$ を

$$(3.3) \quad p_{ij}(t+1) = \mathbf{P}(p_{t+1} = j | p_t = i) \quad i = 1, 2, \dots, K, j = 1, 2, \dots, K$$

として、収益率 $R_{t+1} = \log \frac{S_{t+1}}{S_t}$ の定常分布を考えよう。マルコフ型推移確率が時間に依存しないと仮定し、条件付確率 $p_{ij}(t+1) = p_{ij}$ が方程式

$$(3.4) \quad \pi \mathbf{P} = \pi$$

を満たす定常分布を π としよう。ただし $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k)$, $\sum_{i=1}^k \pi_i = 1$, $\pi_k \geq 0 \quad \forall k$ である。

ここで各局面における収益率は互いに独立にそれぞれ分布関数 F_i ($i = 1, \dots, k$) にしたがうと仮定すれば、収益率の無条件分布は分布 F_i ($i = 1, \dots, k$) の混合分布 (mixture distribution) となる。これを $R_t \sim \sum_{i=1}^k \pi_i F_i(\theta)$, $F_i(x|\theta) = F_i\left(\frac{x - \mu_i}{\sigma_i}\right)$ で表そう。このとき条件付確率は

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(R_t \leq r_0 | \rho_{t-1} = i_1) &= \sum_{i_0=1}^K \mathbf{P}(R_t \leq r_0, \rho_t = i_0 | \rho_{t-1} = i_1) \\ &= \sum_{i_0=1}^K \mathbf{P}(R_t \leq r_0 | \rho_t = i_0, \rho_{t-1} = i_1) \mathbf{P}(\rho_t = i_0 | \rho_{t-1} = i_1) \\ &= \sum_{i_0=1}^K F_{i_0}\left(\frac{r_0 - \mu_{i_0}}{\sigma_{i_0}}\right) p_{i_1 i_0} \end{aligned}$$

となる。したがって、収益率の分布関数は

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \mathbf{P}(R_t \leq r_0) &= \sum_{i_1=1}^K \mathbf{P}(R_t \leq r_0 | \rho_{t-1} = i_1) \mathbf{P}(\rho_{t-1} = i_1) \\ &= \sum_{i_0=1}^K F_{i_0}\left(\frac{r_0 - \mu_{i_0}}{\sigma_{i_0}}\right) \pi_{i_0} \end{aligned}$$

で与えられる。特に分布関数がルベグ測度に関して絶対連続であって、各局面での密度関数が $f_i(\cdot)$ で与えられるとすると、 R_t の期待値は

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \mathbf{E}[R_t] &= \frac{1}{\sigma_{i_0}} \sum_{i_0=1}^K \int_{-\infty}^{\infty} r_0 f_{i_0}\left(\frac{r_0 - \mu_{i_0}}{\sigma_{i_0}}\right) dr_0 \times \pi_{i_0} \\ &= \sum_{i_0=1}^K \pi_{i_0} \{\mu_{i_0} + \sigma_{i_0} \mathbf{E}[x_{i_0}]\} \end{aligned}$$

と表現できる。ただし、 x_{i_0} は基準化した収益率 $x_{i_0} = \frac{r_0 - \mu_{i_0}}{\sigma_{i_0}}$ である。次に収益率分布の同時分布の性質を調べてみよう。まず $u \geq 1$ に対して条件付確率の表現

$$(3.7) \quad \begin{aligned} &\mathbf{P}(R_t \leq r_0, R_{t-u} \leq r_u | \rho_{t-u-1} = i_{u+1}) \\ &= \sum_{i_u=1}^K \mathbf{P}(R_t \leq r_0, R_{t-u} \leq r_u | \rho_{t-u} = i_u, \rho_{t-u-1} = i_{u+1}) \mathbf{P}(\rho_{t-u} = i_u | \rho_{t-u-1} = i_{u+1}) \\ &= \sum_{i_u=1}^K \sum_{i_{u-1}=1}^K \dots \sum_{i_0=1}^K \mathbf{P}\left(\frac{R_t - \mu_{i_0}}{\sigma_{i_0}} \leq \frac{r_0 - \mu_{i_0}}{\sigma_{i_0}}, \frac{R_{t-u} - \mu_{i_u}}{\sigma_{i_u}} \leq \frac{r_u - \mu_{i_u}}{\sigma_{i_u}} \mid \right. \\ &\quad \left. \rho_t = i_0, \dots, \rho_{t-u} = i_u, \rho_{t-u-1} = i_{u+1}\right) \times p_{i_{u+1} i_u} p_{i_u i_{u-1}} \dots p_{i_1 i_0} \end{aligned}$$

を利用しよう。これより、二時点の収益率の同時分布関数は

$$\begin{aligned}
 (3.8) \quad & \mathbf{P}(R_t \leq r_0, R_{t-u} \leq r_u) \\
 &= \sum_{i_{u+1}=1}^K \sum_{i_u=1}^K \cdots \sum_{i_0=1}^K F_{i_0} \left(\frac{r_0 - \mu_{i_0}}{\sigma_{i_0}} \right) F_{i_u} \left(\frac{r_u - \mu_{i_u}}{\sigma_{i_u}} \right) \pi_{u+1} p_{i_{u+1}i_u} \cdots p_{i_1 i_0} \\
 &= \sum_{i_u=1}^K \sum_{i_0=1}^K F_{i_0} \left(\frac{r_0 - \mu_{i_0}}{\sigma_{i_0}} \right) F_{i_u} \left(\frac{r_u - \mu_{i_u}}{\sigma_{i_u}} \right) \pi_u p_{i_u i_0}
 \end{aligned}$$

と表現することができる。ここで $p_{i_u i_0} = P(\rho_u = i_0 | \rho_{t-u} = i_u)$ であることに注意しておく。同時分布関数より同時密度関数は

$$(3.9) \quad f(R_t = r_0, R_{t-u} = r_u) = \sum_{i_u=1}^K \sum_{i_0=1}^K f_{i_0} \left(\frac{r_0 - \mu_{i_0}}{\sigma_{i_0}} \right) f_{i_u} \left(\frac{r_u - \mu_{i_u}}{\sigma_{i_u}} \right) \frac{1}{\sigma_{i_u}} \frac{1}{\sigma_{i_0}} \pi_u p_{i_u i_0}$$

で与えられることがわかる。次に収益率分布の自己共分散 (autocovariance) 構造について調べておこう。ここで積率についての評価

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{E}[R_t R_{t-u}] \\
 &= \sum_{i_u=1}^K \sum_{i_0=1}^K \int_{-\infty}^{\infty} r_0 r_u f_{i_0} \left(\frac{r_0 - \mu_{i_0}}{\sigma_{i_0}} \right) f_{i_u} \left(\frac{r_u - \mu_{i_u}}{\sigma_{i_u}} \right) \frac{1}{\sigma_{i_u}} \frac{1}{\sigma_{i_0}} \pi_u p_{i_u i_0} dr_0 dr_u \\
 &= \sum_{i_u=1}^K \sum_{i_0=1}^K [\mu_{i_0} + \sigma_{i_0} \mathbf{E}(x_{i_0})][\mu_{i_u} + \sigma_{i_u} \mathbf{E}(x_{i_u})] \pi_u p_{i_u i_0}
 \end{aligned}$$

を用いる。自己共分散関数 (autocovariance function) は

$$\begin{aligned}
 (3.10) \quad & \mathbf{Cov}(R_t, R_{t-u}) \\
 &= \sum_{i_u=1}^K \sum_{i_0=1}^K [\mu_{i_0} + \sigma_{i_0} \mathbf{E}(x_{i_0})][\mu_{i_u} + \sigma_{i_u} \mathbf{E}(x_{i_u})] \pi_u p_{i_u i_0} \\
 &\quad - \sum_{i_u=1}^K [\mu_{i_0} + \sigma_{i_0} \mathbf{E}(x_{i_0})] \pi_{i_0} \sum_{i_0=1}^K [\mu_{i_u} + \sigma_{i_u} \mathbf{E}(x_{i_u})] \pi_{i_u} \\
 &= \sum_{i_u=1}^K \sum_{i_0=1}^K [\mu_{i_0} + \sigma_{i_0} \mathbf{E}(x_{i_0})][\mu_{i_u} + \sigma_{i_u} \mathbf{E}(x_{i_u})] \pi_{i_u} (p_{i_u i_0} - \pi_{i_0})
 \end{aligned}$$

で与えられる。したがって、もし $p_{i_u i_0} = \mathbf{P}(\rho_u = i_0 | \rho_{t-u} = i_u) = \pi_{i_0}$ となるならば、共分散はゼロ $\mathbf{Cov}(R_u, R_{t-u}) = 0$ ($u \geq 1$) であることが分かる。また収益率の分散は、

$\mathbf{Var}(R_t) = \sum_{i_0=1}^K \mathbf{E}[(\mu_{i_0} + \sigma_{i_0} x_{i_0})^2] \pi_{i_0}$ と表現される。全く同様に $n \geq 1$ に対する積率は

$$(3.11) \quad \mathbf{E}[R_t^n] = \sum_{i_0=1}^K \pi_{i_0} \mathbf{E}[(\mu_{i_0} + \sigma_{i_0} x_{i_0})^n]$$

と表現される。さらに、 $n_1, n_2 \geq 1$ に対する同時積率を求めると

$$\mathbf{E}[R_t^{n_1} R_t^{n_2}] = \sum_{i_u=1}^K \sum_{i_0=1}^K \mathbf{E}[(\mu_{i_0} + \sigma_{i_0} x_{i_0})^{n_1} (\mu_{i_u} + \sigma_{i_u} x_{i_u})^{n_2}] \pi_{i_u} p_{i_u i_0}$$

で与えられる。したがって、特に二乗収益率の R_t^2 の自己相関関数を取りあげると

$$(3.12) \quad \text{Cov}(R_t^2, R_{t-u}^2) = \sum_{i_u=1}^K \sum_{i_0=1}^K \mathbf{E}[(\mu_{i_0} + \sigma_{i_0} x_{i_0})^2 (\mu_{i_u} + \sigma_{i_u} x_{i_u})^2] \pi_{i_u} (p_{i_u i_0} - \pi_{i_0})$$

で与えられることがわかる。

なお、収益率の二乗変動はボラティリティの変動に対応していると考えられる。株価に幾何ブラウン運動を想定すると、異なる期間での収益率は独立で正規分布にしたがい、ボラティリティは一定値をとる。それに対して、局面転換モデルでは自己共分散関数はゼロではなく、収益率のボラティリティも一定とは限らずに変動するので重要な意味を持っている。ここで、さらに収益率がしたがう各局面において分散の存在を仮定しよう。すなわち、ある正定数 M_1 が存在して $\mathbf{E}[(\mu_{i_0} + \sigma_{i_0} x_{i_0})^2] \leq M_1$ 、 $\mathbf{E}[(\mu_{i_u} + \sigma_{i_u} x_{i_u})^2] \leq M_1$ とする。このとき、もし有限の状態変数のマルコフ連鎖で表現された局面転換過程がエルゴード性 (ergodic) を持てば、ある正定数 $|\eta| < 1$ が存在して、

$$\begin{aligned} \text{Cov}(R_t^2, R_{t-u}^2) &\leq M_1^2 \left| \sum_{i_u=1}^K \sum_{i_0=1}^K [\mathbf{P}(\rho_t = i_0, \rho_{t-u} = i_u) - \mathbf{P}(\rho_t = i_0)\mathbf{P}(\rho_{t-u} = i_u)] \right| \\ &= O(\eta^s) \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} \text{Cov}(R_t, R_{t-u}) &\leq M_1 \left| \sum_{i_u=1}^K \sum_{i_0=1}^K [P(\rho_t = i_0, \rho_{t-u} = i_u) - P(\rho_t = i_0)P(\rho_{t-u} = i_u)] \right| \\ &= O(\eta^u) \end{aligned}$$

を満足することがわかる。以上の考察より得られた局面転換 (RS) モデルの一般的性質は次のようにまとめることができる。

命題 1: 局面転換 (RS) モデルにおいて局面転換の推移確率 (transition probability) が時間に依存せず非既約 (irreducible) かつ非循環 (a-periodic) のマルコフ連鎖 (Markov chain) とする。このとき収益率 R_t と R_{t-s} の同時分布は (3.10) で与えられる。各局面における収益率の分散が有限ならば自己共分散関数は (3.12) で与えられる。またこれらの仮定の下で、収益率と二乗収益率は弱従属 (weakly dependent) の弱定常過程 (weakly stationary process) となる。

次に各局面において収益率がしたがう分布を仮定して母数を推定する最尤推定法 (maximum likelihood method) を考察しよう。ただし、ここでは議論を簡単化するために $K = 2$ のケースを考えることにする。一般には $K > 2$ の場合も同様に扱うことができるが、データへのフィットや推定した結果の解釈はそれほど自然なものとはならないことが多いことをここでは注意しておく。特に収益率が各局面でしたがう分布が互いに独立な正規分布

にしたがうと仮定すると、推定するパラメーターは $\theta = \{\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, p_{12}, p_{21}\}$ の 6 個となる。ここで π は、 $\pi_1 p_{11} + \pi_2 p_{21} = \pi_1$ 、 $\pi_1 p_{12} + \pi_2 p_{2,2} = \pi_2$ 、より

$$\pi_1 = \frac{p_{21}}{p_{12} + p_{21}}, \pi_2 = 1 - \pi_1 = \frac{p_{12}}{p_{12} + p_{21}}$$

により与えればよい。

ここで観測期間において n 個のデータが観察されたとすると、観察量 $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \dots, R_n)$ の尤度関数は、

$$L_n(\theta) = f(R_1|\theta)f(R_2|\theta, R_1)f(R_3|\theta, R_1, R_2) \cdots f(R_n|\theta, R_1, R_2, \dots, R_{n-1})$$

で与えられる。ここで f は収益率 R の密度関数、 $t-1$ 時点までの情報を所与とした t 番目の観測値がしたがう対数条件付密度関数は $\log f(R_t|R_{t-1}, R_{t-2}, \dots, R_1, \theta)$ である。尤度関数を構成する要素、例えば時刻 t における条件付分布はそれぞれ $t-1$ までの観測値を所与として逐次的に計算することができる。実際に与えられたデータに対して尤度関数を最大化するのは明示的には可能ではない。そこで最適化アルゴリズムとしてよく知られている EM(Expectation-Maximization) アルゴリズムを利用することで実行することができる。この計算アルゴリズムは、母数ベクトルについてまず初期値を与え、その初期値得られた観測値を元に各時点における局面変化の確率を推定することを行う。次に推定された確率を利用して時点 $t = 1, 2, \dots, n$ のデータに対する尤度関数を求め、それを 4 個の母数について最適化することにより母数を推定する。さらに、推定された母数を二回目の初期値として再び計算を実行し、この繰り返し計算を収束するまで行うというものである⁴。

ここで、こうして得られた最尤推定量の漸近的性質については、独立標本に関する議論を直接に適用することはできないことに注意しておく。命題 1 にまとめておいたように、収益率データは弱定常過程となるので、統計的時系列モデルの推定の問題となっている。局面転換モデルは非線形時系列モデルであるので教科書的な線形モデルに関する議論を適用することもまた可能ではない。ところが、幸いなことに隠れマルコフ (Hidden Markov) モデルについてはこれまで統計的時系列解析においては幾つかの研究があり、その理論的結果を適用することで最尤推定量の漸近的結果が得られる。特に観測されない状態の取りうる値が有限であって観測データが連続変量、である隠れマルコフ型の統計的時系列モデルにおける最尤推定量の一致性については Leroux (1982) の結果、漸近正規性については Bickel et. al.(1998) の結果が適用できる。各局面での収益率の分布が一般の場合において最尤推定量のよい性質を導くための正則条件についてはこれら二つの論文に詳しく説明されている。例えば各局面における分布が正規分布であれば、その正則条件はかなり単純化される。母数空間 $\Theta = \{\mu_1, \mu_2, 0 < \sigma_1, 0 < \sigma_2, 0 < p_{12} < 1, 0 < p_{21} < 1\}$ とすると、真の母数値が母数空間の境界上にあると、通常の結果が必ずしも成立しないことに注意しておこう。例えば、統計家の間ではよく知られている例としては、各局面の分布が正規分布にしたがうとき、分散の母数 $\sigma_2 \rightarrow 0$ とすると尤度関数をいくらでも大きくすることができ、尤度関数が発散する可能性がある。そこで母数空間を十分に大きい正実数 M_i ($i = 2, 3, 4$) により

$$\Theta = \{|\mu_1| \leq M_2, |\mu_2| \leq M_2, 1/M_3 \leq \sigma_1, \sigma_2 \leq M_3, 1/M_4 \leq p_{12}, p_{21} \leq 1 - 1/M_4\}$$

⁴例えば Hamilton (1990) は計算アルゴリズムを詳しく説明しているが、本稿でのデータ分析はその計算アルゴリズムを利用した。

	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
TSE 300 1956-1999	0.008	0.156
TOPIX 1956-1999	0.007	0.175
TOPIX 1956-1979	0.009	0.160
TOPIX 1980-1989	0.014	0.144
TOPIX 1990-1999	-0.004	0.225

表 1: 月次収益率の平均と年次のボラティリティ

と制約することが考えられる。ここで新たな結果ではないが、収束計算や推定結果の解釈など応用上も重要であるので念のためにここでまとめておこう。

命題 2 : 局面転換 (RS) モデルにおいて局面転換の推移確率が時間に依存せず、非既約 (irreducible) かつ非循環 (a-periodic) のマルコフ連鎖 (Markov chain) とする。収益率 R_t は各局面において密度関数を持ち、分散が存在し、さらに同時分布が母数について識別可能、母数空間がコンパクトで真の母数とその内点となる正則条件を満足するものとする。このとき最尤推定量は一致性と漸近正規性を持つ、すなわち

$$(3.13) \quad \hat{\theta} \xrightarrow{p} \theta_0,$$

かつ

$$(3.14) \quad \sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta_0) \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, \mathbf{I}(\theta_0)^{-1})$$

となる。ただし $\hat{\theta}$ は最尤推定量、 θ_0 は真の母数ベクトル、 $\mathbf{I}(\theta_0)$ は尤度関数より求められる (正定符号行列である) フィッシャー情報行列

$$\mathbf{I}(\theta_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbf{E} \left[- \frac{\partial^2 \log L_n(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \Big|_{\theta_0} \right]$$

とした。

次に各局面での収益率の条件付分布を正規分布と仮定した上で、カナダのデータと日本のデータを用いた推定結果を示しておく。ここでまずデータについて説明しておく。カナダのデータとしてはカナダの年金保険の分離ファンド契約において共通の指数になっているのがトロント証券取引所 300 種 (TSE300: Toronto Securities Exchange300) である。そこで配当込みの TSE300 の月次の対数収益率とその 12 カ月の移動標準偏差 (移動ボラティリティ) を図 1 に示しておくが、データの期間は TSE が導入された 1956 年 1 月から 1999 年 12 月までの 527 個である。日本に関しては、株式指標として標準的な TOPIX の月次の対数収益率 (配当無) を用いた。月次対数収益率とその 12 カ月の移動標準偏差を図 2 に示しておくが、データの期間は 1956 年 1 月から 1999 年 12 月まで、データ数は 527 個である。

全期間の対数収益率を用いたデータの平均とボラティリティの推定値をまとめると、表 1 のようになる。1956 年から 1999 年までのデータで見ると、TSE300 の年次のボラティリティの推定値は 0.156、TOPIX の年次のボラティリティの推定値は 0.175 となってい

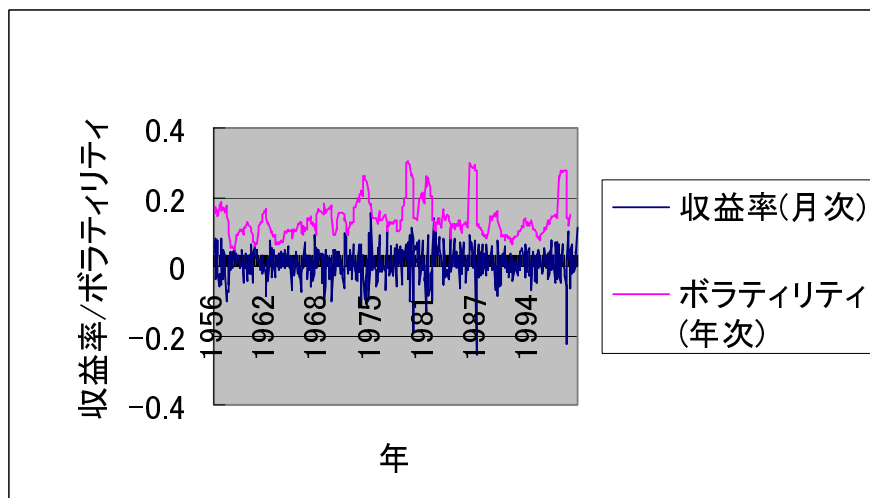


図 1: 月次収益率とボラティリティ(TSE300)

る。TSE300 の月次の対数収益率の平均は 0.008，TOPIX の月次の対数収益率の平均は 0.007 となっている。なお、TOPIX に関しては期間を三つに分けて、その平均、ボラティリティの推定値を示しておく。これは 4 節で局面転換 (RS) モデルを利用して責任準備金の問題を考えるが、その際には楽観的なシナリオと悲観的なシナリオとして利用し、責任準備金の額がどう変化するかを調べる為である。

図 1 より、TSE のデータでは 1980 年初頭に、TOPIX のデータでは 1990 年初頭に、特にボラティリティの高い状態が数ヶ月続いている。こうした観察事実は独立対数正規 (ILN) モデルではとらえることが難しいので RS モデルでどのようにとらえられるのか、推定結果を表 2 に示しておく。表 2 より、TSE300 と TOPIX はともに、1956 年から 1999 年のデータに関して予想された結果が得られる。すなわち、両ケースとも高ボラティリティ局面の平均が低ボラティリティ局面の平均を下回っており、年次のボラティリティは 20 % 前半になっている。しかしながら、相違点も少なくない。TSE300 と TOPIX では、局面間の平均の差が 0.029，0.012 とかなり異なっている。局面が転換する確率も、特に p_{21} に関しては、TSE300 が 0.191，TOPIX が 0.045 と異なっている。このことは、TSE300 のデータのほうが TOPIX のデータより高ボラティリティの状態が続かないということを示唆している。ここで局面 i が t 月続く確率は $p_{ii}^{t-1}p_{ij}$ であるから局面 i が継続する平均期間は $\frac{1}{p_{ij}}$ になる。したがって、TSE300 のデータの高ボラティリティ局面の状態にある平均期間は、約 5.2 ヶ月であり、TOPIX では約 22 ヶ月と推定される。

ここで TOPIX のデータの期間別の推定結果について見ると、予想していた結果とは異なるところがある。特に、1980-1989 においては、高ボラティリティ局面の方が平均が高く出ている。これはバブル期を含む当時のマクロ経済の動向を反映してのものとして解釈できよう。1990-1999 においては、バブル崩壊をうけて高ボラティリティ局面と低ボラティリティ局面の平均がともに負になっている。また、それぞれのレジューム間の平均の差が異なっていること、 p_{21} に関しては、結果に大きな違いが見られることが読み取れる。すなわち、日本のデータにおいては推移確率 p_{11} および p_{22} の推定は不安定であることが

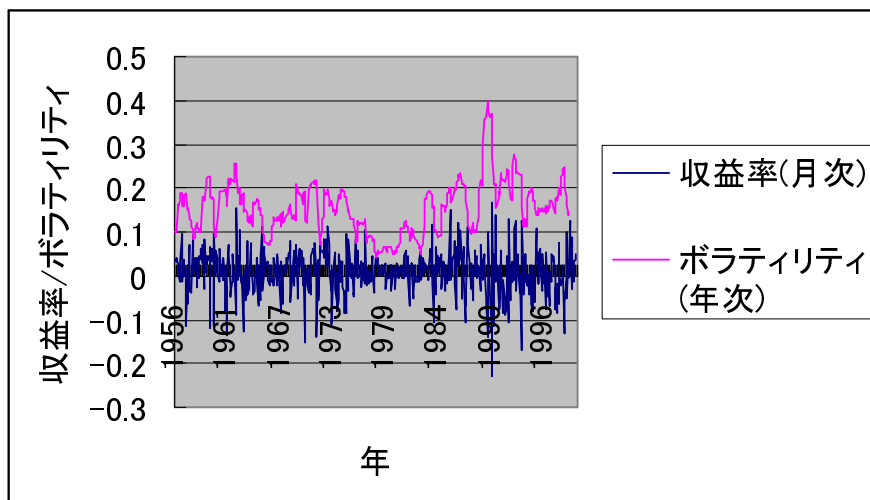


図 2: 月次収益率とボラティリティ (TOPIX)

一因であろうと考えられる。

ここで上で求めた推定結果を用いて独立増分対数正規 (ILN) モデルとの比較を行おう。
まず ILN モデル

$$(3.15) \quad R_t = \mu + \sigma \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim N(0, 1)$$

のパラメーターの最尤推定法による推定結果を表 3 に示しておく。収益率が互いに独立に対数正規分布に従うと仮定すると、標本平均と標本分散が最尤推定値になるが、ここでは比較のため、全 5 種類の局面転換対数正規 (RSLN) モデルと独立増分対数正規 (ILN) モデルの尤度関数の値を表 4 に示しておく。

ここでエクイティリンク型保険では長期にわたる収益率分布の裾をどの様にとらえるかが問題であることに注意しよう。そこで局面転換モデルの局面に滞在回数の分布関数を求め、そこから、局面転換モデルによる長期における収益率の分布を求め、通常の独立増分対数正規モデルによる結果と比較することを考えよう。

ここで M を局面 1 に滞在した総回数とすると、 $M \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ の可能性がある。また確率 $\mathbf{P}(M = m) = p(m)$ で表現し、さらに M_t を期間 $[t, n]$ において局面 1 に滞在した総回数としよう。そして、 $\mathbf{P}(M_t = m | \rho_{t-1})$ ($m = 0, 1, \dots, n - t; t = 1, \dots, n - 1$) を考察しよう。ここで明らかに、 $m > n - t$, $m < 0$ に対しては $\mathbf{P}(M_t = m | \rho_{t-1}) = 0$ となる。ここで関係

$$\mathbf{P}(M_t = m | \rho_{t-1} = 1) = p_{11} \mathbf{P}(M_{t+1} = m - 1 | \rho_t = 1) + p_{12} \mathbf{P}(M_{t+1} = m | \rho_t = 2)$$

を使えば、逐次的に確率 $M = M_0$ を求めることができる。 M の分布関数を利用して n 時点における指数の総収益率の分布を求め、 S_n は n 時点での指数の総収益率の分布、 $S_0 = 1$ と仮定すれば、 $S_n | M \sim \text{lognormal}(\mu^*(M), \sigma^*(M))$, $\mu^*(M) = M\mu_1 + (n - M)\mu_2$, $\sigma^*(M) = \sqrt{M\sigma_1^2 + (n - M)\sigma_2^2}$ である。各局面での分布を正規分布に特定化すれば、 M

	$\hat{\mu}_1$	$\hat{\sigma}_1$	$\hat{\rho}_{12}$
	$\hat{\mu}_2$	$\hat{\sigma}_2$	$\hat{\rho}_{21}$
TSE 300 1956-1999	0.012 (0.002)	0.039 (0.001)	0.031 (0.008)
	-0.017 (0.014)	0.068 (0.010)	0.191 (0.059)
TOPIX 1956-1999	0.014 (0.002)	0.033 (0.001)	0.055 (0.015)
	0.002 (0.004)	0.061 (0.003)	0.045 (0.012)
TOPIX 1956-1979	0.013 (0.002)	0.046 (0.002)	0.053 (0.013)
	-0.047 (0.005)	0.065 (0.003)	0.723 (0.169)
TOPIX 1980-1989	0.012 (0.003)	0.029 (0.002)	0.033 (0.019)
	0.022 (0.011)	0.059 (0.007)	0.070 (0.042)
TOPIX 1990-1999	-0.001 (0.005)	0.058 (0.004)	0.008 (0.008)
	-0.035 (0.056)	0.105 (0.040)	0.116 (0.131)

表 2: 最尤推定法による RSLN モデルのパラメータの推定値
(注: カッコ (·) は標準偏差の推定値を示している。)

	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
TSE 300 1956-1999	0.008 (0.002)	0.046 (0.001)
TOPIX 1956-1999	0.007 (0.002)	0.051 (0.002)
TOPIX 1956-1979	0.009 (0.003)	0.046 (0.002)
TOPIX 1980-1989	0.014 (0.004)	0.042 (0.003)
TOPIX 1990-1999	-0.004 (0.006)	0.065 (0.004)

表 3: 最尤推定法による ILN モデルの母数推定値
(注: カッコ (·) は標準偏差の推定値を示している。)

	RSLN モデルの尤度関数値	ILN モデルの尤度関数値
TSE 300 1956-1999	917.38	888.19
TOPIX 1956-1999	852.48	825.14
TOPIX 1956-1979	477.14	472.16
TOPIX 1980-1989	223.07	206.66
TOPIX 1990-1999	161.40	145.69

表 4: 2 つのモデルの尤度関数値

の分布関数 $p(m)$ を用いて、

$$\begin{aligned}
 (3.16) \quad F_{S_n}(x) = \mathbf{P}(S_n \leq x) &= \sum_{m=0}^n \mathbf{P}(S_n \leq x | M = m) p(m) \\
 &= \sum_{m=0}^n \Phi\left(\frac{\log x - \mu^*(m)}{\sigma^*(m)}\right) p(m)
 \end{aligned}$$

となる。ここで Φ は標準正規分布の累積分布関数を表している。同様にして、 S_n の確率密度関数は、

$$(3.17) \quad f_{S_n}(x) = \sum_{m=0}^n \phi\left(\frac{\log x - \mu^*(m)}{\sigma^*(m)}\right) \frac{1}{x} \frac{1}{\sigma^*(m)} p(m)$$

と書けるが、 ϕ は標準正規分布の確率密度関数を表している。これらの累積密度関数、確率密度関数を使って局面転換対数正規 (RSLN) モデルと独立対数正規 (ILM) モデルにしたがう収益率の分布関数や確率密度関数などを推定することも出来る。長期間の収益率分布については独立増分対数正規 (ILN) モデルに比べて、局面転換対数正規 (RSLN) モデルの左の裾が厚いことがみてとれる。こうした裾の厚さが、エクイティリンク型保険において長期の契約におけるリスクをモデリングする際に有用になってくる。しかしながら、このコメントは TSE300 の全データと TOPIX の全データ、並びに、TOPIX の 1956-1979 のデータに関して言えるものである。TOPIX の 1980-1989 のデータと TOPIX の 1990-1999 のデータに関して求めた結果は、少なくとも高ボラティリティ期間でもネガティブの平均を持つという結果になっている。

ここでは表 2 で推定したパラメーターを使い、さらに初期値 $S_0 = 100$ とした時の収益率の累積分布関数と確率密度関数を図 3 から図 7 に与えておく。長期間の収益率分布については独立対数正規 (ILN) モデルに比べて、局面転換対数正規 (RSLN) モデルの左の裾が厚いことがみてとれる。こうした裾の厚さが、エクイティリンク型保険において長期の契約におけるリスクをモデリングする際に有用になってくる。

次に滞在総回数の分布関数を用いれば、任意の時点における株価の積率を求めること

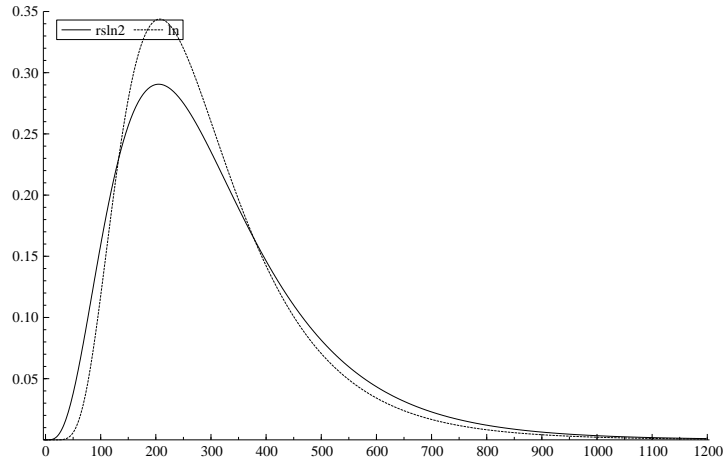


図 3: TSE300 の確率密度関数

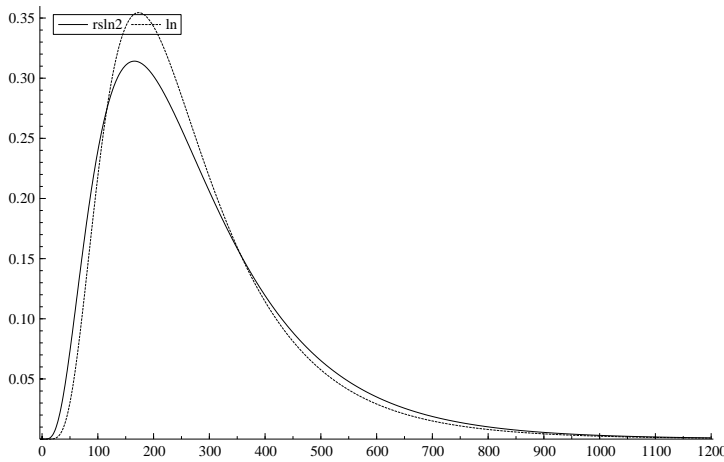


図 4: TOPIX1956-1999 の確率密度関数

ができることに注意する。条件付対数正規分布の性質を利用すると

$$\begin{aligned}
 (3.18) \quad & \mathbf{E}[(S_{t+1})^k] \\
 &= \mathbf{E}\left[\exp\left(k(M\mu_1 + (n - M)\mu_2) + \frac{k^2}{2}(M\sigma_1^2 + (n - M)\sigma_2^2)\right)\right] \\
 &= \mathbf{E}\left[\exp\left(M\left(k(\mu_1 - \mu_2) + \frac{k^2}{2}(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)\right)\right) \times \exp\left(kn\mu_2 + \frac{k^2}{2}n\sigma_2^2\right)\right] \\
 &= \exp\left(kn\mu_2 + \frac{k^2}{2}n\sigma_2^2\right) \times \sum_{m=0}^n \exp\left(m\left(k(\mu_1 - \mu_2) + \frac{k^2}{2}(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)\right)\right)p(m)
 \end{aligned}$$

となることがわかる。この (3.18) 式を用いて、局面転換 (RSLN) モデルに関して上記の 5 ケースについて表 5 に、平均、2 次、3 次、4 次のモーメント、歪度、尖度を求めた結果を与えておく。また比較の為に収益率データから計算した結果を表 6 にまとめておく。なお TOPIX は全期のデータを、TOPIX1,2,3 はそれぞれ 1956 年～1979 年、1980 年～1989 年、1990 年～1999 年の期間のデータをそれぞれ意味している。

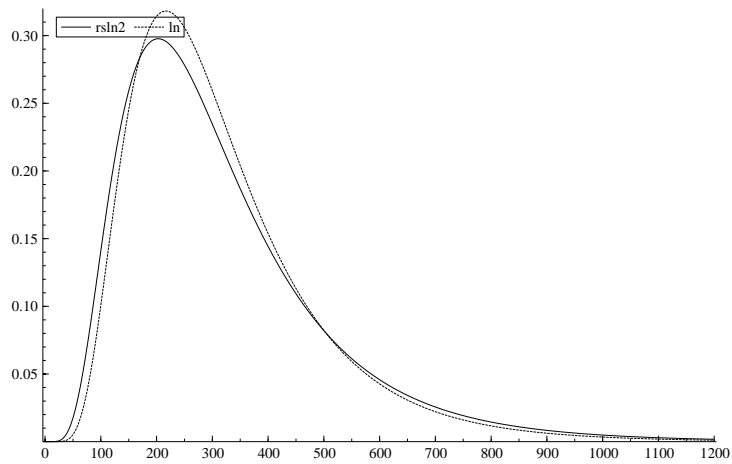


図 5: TOPIX1956-1979 の確率密度関数

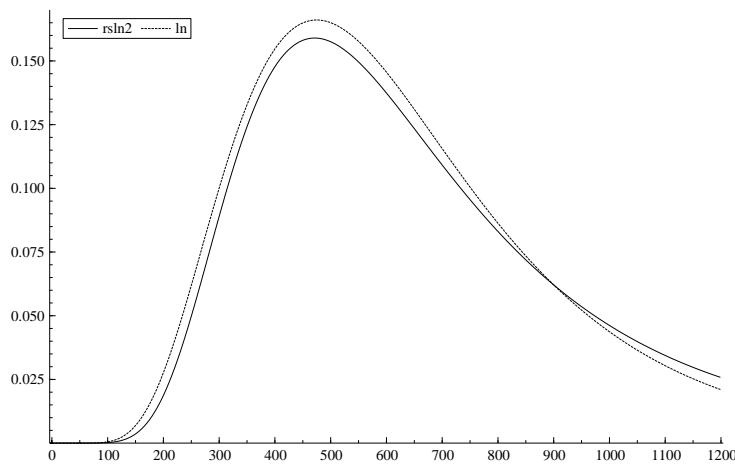


図 6: TOPIX1980-1989 の確率密度関数

4 変額年金保険のリスク測定

局面転換 (RS) モデルを用いたリスク評価法を考えよう。特に具体的例として局面転換 (RS) モデルを用いたエクイティリンク型保険のリスク評価の例として、分離ファンドのリスク評価について考察する。分離ファンド契約の最も典型的な形式として、10 年間保険料が投資信託に投資されるという状況考え、運用などの諸費用は月々差し引かれるとする。保険の満期には契約保有者は、受け取りが支払った保険料を下回らないという保証がついた形で投資の成果を受け取る契約を想定しよう。ここで、保険会社の満期における責任準備金は、 G を満期において保証している額、 F を満期におけるファンドとすると、 $\max[G - F, 0]$ で与えられる。したがって、この契約はヨーロッパ型プット・オプション (European put-options) として解釈することも出来る。こうした金融契約に対して、その潜在的なリスクを分析するためには、特に左側の裾が厚いことを許す長期の株式収益率モデルが必要となる。すなわち、保険会社はプット・オプション契約の販売に伴い、株式運用から生じうる将来における不利な経済状況をも考慮する必要がある。

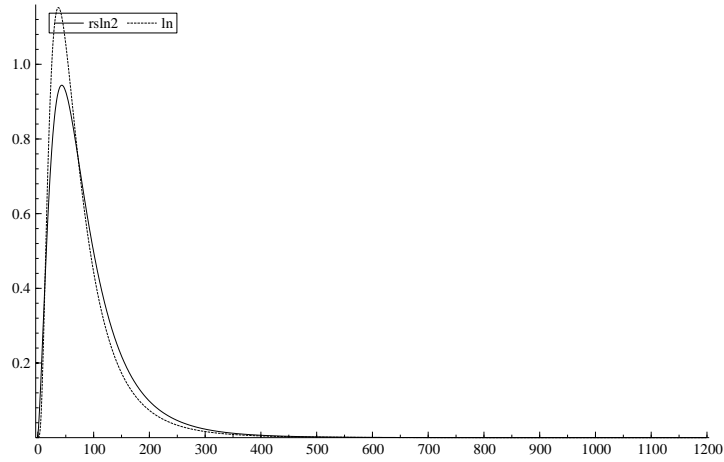


図 7: TOPIX1990-1999 の確率密度関数

	TSE300	TOPIX	TOPIX1	TOPIX2	TOPIX3
平均	3.1056	2.6331	3.2296	7.1764	0.90306
2 次モーメント	12.853	8.3228	14.181	69.183	1.3333
3 次モーメント	68.875	30.420	84.092	955.40	3.0986
4 次モーメント	468.95	128.66	669.59	20376.	11.160
歪度	1.5727	0.72517	1.9362	2.7587	2.5754
尖度	7.5859	5.3237	10.262	20.377	16.770

表 5: RSLN モデルの積率・歪度・尖度

1つのリスクを測定する基準としては、責任準備金の分布のパーセント点を見ることが考えられる。これがバリュー・アット・リスク (VaR:value-at-risk) アプローチである。ここでは、株価の収益率を説明するモデルとして独立増分対数正規モデルを用いたときと局面転換 (RS) モデルを用いたときのパーセント点を比較してみよう。

ここで単純化の為に保険契約の中途解約については考えないことにする。また $G = 100$ を最低保証額とし、さらに運用コストとして、複利で月 h パーセントがファンドから差し引かれるとして、さらに S_n で n 時点における当該資産の価格、 $S_0 = 100$ を仮定すれば、満期時における責任準備金は

$$(4.1) \quad X = \max(G - S_n e^{-nh}, 0)$$

となる。ここで $\zeta = P(S_n e^{-nh} > G)$ としよう。もし $\alpha \leq \zeta$ であれば、責任準備金の分布の 100α パーセント点は $V_\alpha = 0$ である。さらに $\alpha > \zeta$ となる場合には V_α は

$$(4.2) \quad F_{S_n}((G - V_\alpha)e^{nh}) = (1 - \alpha)$$

より

$$(4.3) \quad V_\alpha = G - e^{-nh} F_{S_n}^{-1}(1 - \alpha)$$

	TSE300	TOPIX	TOPIX1	TOPIX2	TOPIX3
平均	2.9993	2.7612	3.1991	6.4926	0.80748
2次モーメント	11.479	10.363	13.228	51.858	1.0826
3次モーメント	56.059	52.869	70.704	509.54	2.4099
4次モーメント	349.34	366.60	488.48	6159.1	8.9074
歪度	1.7212	2.0134	1.7810	1.5498	2.9745
尖度	8.6916	10.979	9.1229	7.5538	22.025

表 6: 収益率より推定された積率・歪度・尖度

で与えられる。ここで F_{S_n} は当該資産の n 時点における分布関数、 $F_{S_n}^{-1}$ はその逆関数を表している。特に独立増分対数正規 (ILN) モデルの場合には標準正規分布の累積分布関数の逆関数により $z_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$ と置けば、

$$(4.4) \quad V_\alpha = G - S_0 \exp[-z_\alpha \sqrt{n}\sigma + n\mu - nh]$$

である。

ここで VaR(バリュアット・リスク) はパーセント点でありその点よりも左側の分布の形状は考慮しない基準になっていることに注意しよう。それに対して、実際に北米で有力となっているリスク管理法として、裾条件付期待値 (CTE, conditional tail expectation) がある。この統計量は、責任準備金の値が分布の $(1 - \alpha)$ の裾に落ちることを所与としたときの責任準備金の期待値に対応する。CTE はパーセント点を越えた分布の裾をすべて利用しているからバリュアット・リスクよりもさらに悪化する状況をもより現実的に考慮していることになる。したがって、VaR に比べるとより保守的な基準を意味している。

ここで、連続かつ単調増加の責任準備金の分布に対して $0 \leq \alpha < 1$ の範囲にある任意の母数 α に対する CTE は

$$(4.5) \quad CTE(\alpha) = \mathbf{E}[X|X > V_\alpha]$$

で与えられる。ここで V_α はバリュアット・リスク値である。こうした CTE の定義によれば、例えば $\alpha < \zeta$ に対しては $V_\alpha = 0$ となる。このようなケースが実用的に望ましくないとするれば、例えば $\beta' = \max \beta : V_\alpha = V_\beta$ という β に基づき

$$(4.6) \quad CTE(\alpha) = \frac{(1 - \beta')\mathbf{E}[X|X > V_\alpha] + (\beta' - \alpha)V_\alpha}{1 - \alpha}$$

と定義することを、例えば Hardy (2001) は提案している。このような CTE の定義は一種の実用的な簡便法と考えられよう。

ここで $\alpha \geq \zeta$ を仮定してすると

$$\begin{aligned}
CTE(\alpha) &= \mathbf{E}[X|X > V_\alpha] \\
&= \mathbf{E}[G - S_n e^{-nh} | S_n < (G - V_\alpha)e^{nh}] \\
&= \frac{1}{1 - \alpha} \int_0^{(G - V_\alpha)e^{nh}} (G - ye^{-nh}) f_{s_n}(y) dy \\
&= \frac{1}{1 - \alpha} [GF_{s_n}((G - V_\alpha)e^{nh}) - \int_0^{(G - V_\alpha)e^{nh}} ye^{-nh} f_{s_n}(y) dy] \\
&= G - \frac{e^{-nh}}{1 - \alpha} \int_0^{(G - V_\alpha)e^{nh}} y f_{s_n}(y) dy
\end{aligned}$$

と表現されことに注意しよう。ここで初期値 $S_0 = 1$ かつ $S_n \sim LN(n\mu, \sqrt{n}\sigma)$ であるならば、 $\alpha \geq \zeta$ に対して

$$\begin{aligned}
(4.7) \quad CTE(\alpha) &= G - \frac{\exp(n\mu - nh + n\sigma^2/2)}{1 - \alpha} \int_{-\infty}^{\log(G - V_\alpha) + nh} \frac{1}{\sqrt{2n\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x - n\mu - n\sigma^2)^2}{2n\sigma^2}\right) dx \\
&= G - \frac{\exp(n\mu - nh + n\sigma^2/2)}{1 - \alpha} \Phi\left(\frac{\log(G - V_\alpha) - n\mu + nh - n\sigma^2}{\sqrt{n}\sigma}\right)
\end{aligned}$$

となる。なお、この表現は初期値 $S_0 = 1$ を仮定しているのもので、より一般の初期値 S_0 に対しては、同様の議論により

$$\begin{aligned}
(4.8) \quad CTE(\alpha) &= G - \frac{\exp(n\mu - nh + \log(S_0) + n\sigma^2/2)}{1 - \alpha} \\
&\quad \times \Phi\left(\frac{\log(G - V_\alpha) - \log(S_0) - n\mu + nh - n\sigma^2}{\sqrt{n}\sigma}\right)
\end{aligned}$$

で与えられる。

また、 S_n が局面転換対数正規 (RSLN) モデルにしたがうときには、 $S_n|M \sim \text{lognormal}(\mu^*(M), \sigma^*(M))$ (ただし $\mu^*(M) = M\mu_1 + (n - M)\mu_2$, $\sigma^*(M) = \sqrt{M\sigma_1^2 + (n - M)\sigma_2^2}$) となることに注意すると、 $\alpha \geq \zeta$ ならば

$$\begin{aligned}
(4.9) \quad CTE(\alpha) &= G - \frac{e^{-nh}}{1 - \alpha} \sum_{m=0}^n p(m) (\exp(\mu^*(m) + \log(S_0) + \sigma^*(m)^2/2)) \\
&\quad \times \Phi\left(\frac{\log(G - V_\alpha) - \log(S_0) - \mu^*(m) + nh - \sigma^*(m)^2}{\sigma^*(m)}\right)
\end{aligned}$$

となる。

さらに、特に $\alpha < \zeta$ の場合には、 $\beta' = \zeta$ かつ $V_\alpha = V_\zeta = 0$ であるから $CTE(\zeta) = \mathbf{E}[X|X > 0]$ となるので、(4.6) の定義を採用すれば、

$$(4.10) \quad CTE(\alpha) = \frac{1 - \zeta}{1 - \alpha} CTE(\zeta)$$

で与えられる。

次に既に推定された 5 種類の母数を用いて局面転換対数正規 (RSLN) モデルによりシミュレーションを行い、バリュー・アット・リスクと CTE のリスク評価を表 7 にまとめ

	TSE300	TOPIX	TOPIX1	TOPIX2	TOPIX3
ζ	0.8724	0.8302	0.9135	0.99968	0.1805
$V_{0.90}$	8.8053	19.473	0	0	81.035
$V_{0.95}$	28.215	37.030	15.028	0	86.443
$V_{0.975}$	42.216	49.254	29.252	0	90.073
$CTE(0.90)$	31.558	39.669	18.784	0.0366	88.524
$CTE(0.95)$	44.837	51.547	32.174	0.0731	91.258
$CTE(0.975)$	55.008	60.114	42.562	0.1463	93.322

表 7: RSLN モデルによるリスク評価

ておく。比較のために独立対数正規 (ILN) モデルについても表 8 にまとめておく。これらの表より、1980 年-89 年のような 2 つの局面の平均が正であるような場合においては、当然ながら事後的には責任準備金の額がほとんど不要であったことが分かる。他方、1990 年-1999 年のような 2 つの局面での平均が負であるような場合においては、責任準備金の額が非常に大きくなることもまた分かる。

次に時間的経過に伴い、将来における責任準備金の評価をどうすべきかについて考えてみよう。ある j 期 ($0 \leq j < 120$) の責任準備金の額は確率密度関数

$$(4.11) \quad f_{S_{120-j}}(x) = \sum_{m=0}^{120-j} \phi\left(\frac{\log x - \mu^*(m) - \log S_j}{\sigma^*(m)}\right) \frac{1}{x} \frac{1}{\sigma^*(m)} p(m)$$

にしたがうと考えられる。ただし、 S_{120-j} は残り $120-j$ 月の当該資産を表すが、 j 期では、 S_j が確定することになる。ここでは、1 年後から 8 年後まで 1 年ごとに責任準備金はどのように調整すべきであるかをシミュレーションにより考察してみる。系列 $S_{12}, S_{24}, \dots, S_{96}$ までを 100 回乱数発生させ、責任準備金の評価を 100 回行いその平均をとってみた。それらのシミュレーションを利用し、表 9 には TSE の計算結果、表 10 には TOPIX の計算結果をそれぞれまとめておいた。ここで year は残存年数であり、year が減ると準備金の額も減る傾向にある事が観察される。収益率が独立増分対数正規 (ILN) モデルにしたがう場合には対数正規分布の性質を利用して簡単に様々な統計量が計算できるが、局面転換モデルの場合には残存期間がある程度あると、その効果は複雑となるのでシミュレーションが必要となろう。

5 結語

この論文では生命保険業において近年に注目されている変額年金保険とそれに関わる新しいリスク管理の統計的方法を検討した。ここで得られた主要な結論は次のようにまとめることができる。

第一に変額年金保険のリスク管理には伝統的に保険数理 (アクチュアリアル法) が依拠してきた古典的な大数の法則や中心極限定理が十分な役割を果たし得ないという意味で保険業においてはかなり新たな問題を提起していることは明らかである。

第二に北米の保険関係者を中心にこの間議論されている局面転換 (RS) モデルによるリスク管理法は、ファイナンス分野で開発されたブラック・ショウルズ・モデルに対応す

	TSE300	TOPIX	TOPIX1	TOPIX2	TOPIX3
ζ	0.9046	0.8327	0.9390	0.99864	0.1364
$V_{0.90}$	0	16.213	0	0	81.702
$V_{0.90}$	15.621	31.622	4.8049	0	85.850
$V_{0.90}$	27.992	42.661	18.806	0	88.740
$CTE(0.90)$	18.835	34.317	11.256	0.1650	86.620
$CTE(0.95)$	30.811	45.023	21.754	0.3301	89.290
$CTE(0.975)$	39.869	53.026	32.178	0.6601	91.397

表 8: ILN モデルによるリスク評価

表 9: TSE の動学的リスク評価

year	VaR90	VaR95	VaR97.5	CTE90	CTE95	CTE97.5
10	8.8053	28.215	42.216	31.558	44.837	55.008
9	8.0621	22.197	36.101	29.422	39.673	49.742
8	8.3658	18.841	31.260	28.835	37.775	45.937
7	7.7355	16.155	26.694	27.763	35.888	41.939
6	8.1875	14.937	23.709	27.951	35.890	40.669
5	8.0847	13.944	20.849	27.059	33.814	39.786
4	7.7826	12.688	18.839	26.978	32.046	35.930
3	7.6623	12.149	16.871	23.647	25.464	31.862
2	6.9010	9.6155	12.873	20.322	22.788	27.921

る離散時系列モデルである独立増分の対数正規 (ILN) モデルを適用する時に生じる様々な実証的問題点の幾つかをとりあえず解決してくれる、という側面があるという意味で極めて興味深い方法である。

局面転換モデルにおいては必ずしも各局面での分布を正規分布に限る必要はないが、各局面での収益率分布を正規分布とすると、収益率分布の周辺分布は混合正規分布となり、ボラティリティ変動を許容し、局面転換に関する一般的な条件の下で、弱相関構造を有する直観的に分かりやすい統計的時系列モデルと見なすことができる。

しかしながら、より大きな第三の論点として変額年金保険に関するリスク評価における局面転換モデルの利用を考えると幾つかの問題点も同時に浮上してきた。変額年金保険に関連するリスク全体に目を向けると、伝統的な生命保険で問題としている死亡率リスクというよりも、大きな割合で将来の株価水準といったマクロ経済変数の動向に直接的に依存している。ところが、例えばこの間の北米のマクロ経済動向と日本のマクロ経済動向には共通点はあるものの、異なる大きな変動も少なくない。変額年金の場合には、場合によっては数十年の単位での長期多期間におよぶ保険リスク評価をある程度まで行う必要がある。したがって、当然ではあるが長期の収益率に対し適当に期間を設定して局面転換 (RS) モデルを適用してリスク評価を行うことから問題が発生する可能性があることが確認された。

最後に、局面転換 (RS) モデルは統計的時系列分析 (statistical time series analysis) に

表 10: TOPIX の動学的リスク評価

year	VaR90	VaR95	VaR97.5	CTE90	CTE95	CTE97.5
10	19.473	37.030	49.254	39.669	51.547	60.114
9	14.487	30.632	43.208	35.407	46.047	54.988
8	13.289	25.519	37.810	33.358	42.507	50.434
7	11.378	21.602	32.523	32.586	39.269	46.073
6	10.712	19.244	28.370	32.734	38.389	43.498
5	9.0013	15.990	23.811	29.286	32.484	39.869
4	10.066	15.339	21.231	27.600	32.949	36.413
3	9.2178	13.307	17.371	25.421	29.886	34.586
2	8.6963	11.173	13.855	19.466	25.232	26.820

おいては隠れマルコフ (Hidden Markov) モデルと呼ばれているタイプの時系列モデルであることを指摘しておく。この種の離散時系列モデルは時間的従属性を持つ同時確率分布が非正規性や非線型性をも表現しうる便利な統計学的手段を提供している。ただし、非正規性と非線型性を満足する離散時系列モデルは既にこれまで数多くの研究がなされている。一例のみに言及しておく、経済的考察から開発された非線形時系列モデルとして Kunitomo and Sato(1999) は同時転換自己回帰モデル (SSAR) を提案している。また、よりノン・パラメトリック統計学的方法に基づく多期間リスク管理法については例えば 国友・一場 (2004) が検討している。こうした様々な時系列モデルを含めてどのような統計的方法によるリスク管理が適切なのか、実務面での応用をも含めて今後もさらに検討していく必要がある。

引用文献

- [1] Bickel, P.J, Ritov, Y, and Ryden, T. (1998), “Asymptotic Normality of the Maximum-Likelihood for General Hidden Markov Models,” *Annals of Statistics*, 26-4, 1614-1635.
- [2] Hamilton, J.D. (1989), “A New Approach to the Economic Analysis of Non-stationary Time Series,” *Econometrica*, 57, 357-84.
- [3] Hamilton, J.D. (1990), “Analysis of Time Series subject to Changes in Regime,” *Journal of Econometrics*, 45, 39-70.
- [4] Hamilton, J.D. (1994), *Time Series Analysis*, Princeton University Press.
- [5] Hardy, M.R. (2001), “A Regime-Switching Model of Long-Term Stock Returns,” *North American Actuarial Journal*, 5-2, 42-53.
- [6] Hardy, M.R. (2003), *Investment Guarantees*, John Wiley & Sons Inc.
- [7] Kitagawa, G. (1987), “Non-Gaussian State Space Modelling of Non-stationary Time Series,” *Journal of the American Statistical Association*, 82 (with Discussions), 1032-1063.
- [8] 国友直人・一場知之 (2004), 「多期間リスク管理法と変額年金保険」, Discussion Paper CIRJE-J-113, Graduate School of Economics, University of Tokyo (<http://www.e.u-tokyo.ac.jp/cirje/>よりダウンロード可能), 日本統計学会 (和文) 誌 (近刊)。
- [9] Kunitomo, N. and Sato, S. (1999), “Stationary and Non-stationary Simultaneous Switching Autoregressive Models with an Application to Financial Time Series,” *Japanese Economic Review*, 50-2, 161-190, Blackwell.
- [10] Leroux, B. (1982), “Maximum-likelihood Estimation for Hidden Markov Models,” *Stochastic Processes and their Applications*, 40, 127-143.
- [11] 田中周二・松山直樹 (2004), 「統計学とアクチュアリーの現代的課題」, 日本統計学会 (和文) 誌, Vol.34-1, 41-55.