On Seasonal Adjustment Methods

This is a brief survey of the existing seasonal adjustment methods. We first discuss the problem of economic seasonality commonly observed in many economic time series and the historical development of the X-11 and the X-12-ARIMA methods by the U.S. Census bureau. We also mention to other seasonal adjustment methods including the X-11-ARIMA method, the SEATS-TRAMO method and the Decomp method developed by the Institute of Statistical Mathematics. It is possible to interpret that the underlying stochastic processes of X-12-ARIMA and Decomp are similar and the latter gives automatically the optimal estimation of state variables via the Kalman-filtering. It is advisable to use the Decomp method for examining and monitoring the computational results obtained by the X-12-ARIMA method and the RegARIMA modeling at various central offices in Japan.

季節調整法*

国友直人†

2006 年 1 月

1　経済時系列の季節性

時間的経過とともに観察される多くの経済時系列においては季節的な変動はしばしば観察される。例えば図 1 は日本の法人企業統計（全産業）で観察される 3ヶ月毎の売上高の時間的変化を示している。長期的趨勢（トレンド）、景気変動、不規則変動などとともに季節的変動が無視できないほど大きな変動を示していることがわかる。

< 図 1：法人企業の売上高（四半期）の動向 >

生産、売上高、経常利益、設備投資、消費、あるいは貨幣数量といった重要な経済時系列の多くでは季節的変動が観察され、重要な変動要因となっていることについては古くから注目されており、少なくとも 19 世紀の英国の経済学者の議論まで遡ることができる。S. Jevons (スタンレー・ジェボンズ）をはじめとする著名な経済学者が経済における景気変動の波を分析する過程で好況・不況の循環よりもかなり短い 1 年周期の変動が大きな役割を演じていることに気がつき、主として記述統計的な方法で分析したことが知られている (Nerlove et. al.(1979))。

近代的な数理統計学の成立とともに時系列データの分析方法が考察され、統計的時系列分析（statistical time series analysis）と呼ばれる分野も発展したが、経済時系列における変動の中では比較的周期が明確である、という意味で統計的解析の対象として格好の対象であった。とりわけ 1950 年代頃より移動平均法や多項式の当てはめなど時系列分析における記述統計的手法、さらにはピリオドグラム（periodogram）解析やスペクトル分析（spectral analysis）と呼ばれている統計的分析法が開発され、経済時系列の季節性分析に応用されはじめた。こうした初期における経済時系列分析においても、季節変動を巡る問題は単に経済現象を巡る学問的関心ということに留まらずに、中央官庁におけ

*元となる原稿に対して有益なコメントを寄せてくれた高岡慎氏（東京大学先端科学技術研究センター）に感謝する。
†東京大学経済学研究科教授 (〒 113-0033 東京都文京区本郷 7-3-1, kunitomo@e.u-tokyo.ac.jp)

る季節調整値の作成・公表という実務的な意味で重要な意味を持っていたが、今日でもこうした実務的要請の事情は変わっていない。

ここで議論をわかりやすくする為に、時刻 t に観察可能な１次元の経済時系列 Y_t をトレンド（趨勢項）・循環変動項 TC_t，季節変動項 S_t，曜日・休日効果 TD_t，不規則変動項 I_t により分解する統計モデルを考えよう。原系列がこれらの要素の和

$$Y_t = TC_t + S_t + TD_t + I_t \tag{1}$$

とするのが時系列の加法的成分モデルである。多くの時系列計量経済分析では TC_t 項をさらにトレンド項 T_t と循環項 C_t に分解し、$TC_t = T_t + C_t$ とするのがより一般的であろう。これに対して季節調整ではトレンド（趨勢）項としては、時間の多項式関数など大域的トレンド関数ではなく、循環的変動を含むより柔軟な局所的トレンド (local trend) 関数を考えていると解釈することができよう。なお、実際の季節性の処理ではより一般的に乗法的成分モデル $Y_t = TC_t \times S_t \times TD_t \times I_t$ を仮定して処理することが多いが、乗法的成分モデルは対数変換により加法的成分モデルの議論に還元することができる。加法的成分モデルを用いて説明する方が季節調整の議論は分かりやすい。また、理論的にはより一般に加法的成分モデルと乗法的成分モデルを組み合わせる可能性もありうるが、混合型モデルはこれまであまり実用化はされていない。ただし、官庁統計でよく利用されている後述の X-11 法や X-12-ARIMA 法などでは、乗法的成分モデルに移動平均法を適用するなど、経済時系列の統計理論とは実際の利用は必ずしも整合的とは限らないことにも注意しておく。

経済時系列における季節変動はエコノミストや官庁統計においては経済の長期的趨勢や景気変動を理解する上では不必要と見なされることが少なくない。そこで、実際に観察される経済時系列 $\{Y_t\}$（原系列と呼ばれる）に何らかの変換をほどこすことにより季節性を取り除き、別の時系列 $\{Y_t^*\}$（季節調整済系列と呼ばれる）を作成する統計的方法が古くから研究されている。仮にここで議論している季節成分 S_t が任意の t について関数関係 $S_t = S_{t-s}$(s は季節周期) で定義できたり、確定的な関係としてあらかじめ分かっている場合を大域的季節性 (global seasonality) と呼ぶことにすると、その統計的処理は比較的単純である。例えば、今日でも経済学者がしばしば実証的研究で利用している方法として、季節ダミー変数 $D_{ti} = 1$ (t が第 i 季節), $D_{ti} = 0$ (それ以外) を定義し、観測系列をダミー変数に回帰することにより季節成分を推定し、取り除くことが行われている。数理的に類似の方法として、古典的な統計的時系列分析[1]においては、有限個の三角関数から周期関数を構成して最小二乗法を利用して周期性を分析する方法も利用されることがある。

ところで、統計的時系列解析と呼ばれている研究分野では、時系列データをフーリエ変換して周波数領域（あるいは周期成分）の分析を行うことが一般的である。定常確率過程における自己共分散関数のフーリエ変換をスペクトル密度関数、離散時間の時系列データのフーリエ変換はピリオドグラムとそれぞれ呼ばれているが、大域的季節性が適切な場合には季節周波数（および調和周波数）のみにおいて鋭い山 (ピーク) を持つことになる。しかしながら、現実に観察されている経済時系列においては、近年の年始でのコンビニの営業や夏期休業のあり方の変化など、経済をとりまく環境が時間とともに変化するにともない季節性も時間的に変化している可能性、すなわち局所的季節性 (local

[1]例えば Anserson (1971) 第 2 章に詳しい説明がある。

seasonality) まで考慮する必要がある。こうした季節性が時系列データに存在する場合には、スペクトル密度関数は季節周波数（および調和周波数）の周辺でよりなだらかな山 (ピーク) を持つと考えられよう（例えばハーベイ (1986)3 章の議論を参照）。ここで実際に観測される経済時系列（原系列）から何らかの統計的方法によりより複雑な局所的季節性を推定し、原系列より推定された季節性を除去して、季節調整系列を作成することが必要になる。この操作は周波数領域（すなわち波動成分）の時系列分析より、何らかの方法（しばしばフィルターと呼ばれる）で季節周波数に対応するピークをデータより除去する変換と解釈できる。こうした観測される時系列より季節成分のみを除去することを目的とする経済時系列データの変換方法は、一般に季節調整法 (seasonal adjustment method) と呼ばれている。今日でも日本を含めた先進諸国の中央官庁においてよく用いられている方法としては、米国センサス局で開発された X-11 法と X-12-ARIMA 法がよく知られているが、他方、経済時系列分析に関心のある統計学の研究者の間では統計数理研究所が開発した DECOMP 法がよく知られている。

2 季節調整法 X-11 法

2.1 歴史的経緯

米国センサス局で開発されている一連の季節調整法はセンサス局法と呼ばれているが、1950 年代に J. Shiskin(シスキン）を中心として当時にようやく利用可能となりつつあった（メインフレーム）電子計算機を利用したセンサス局 I 法を本格的に開発したのが現代の季節調整法の実質的な始まりといってよいであろう。センサス局法では当時の記述的時系列分析で用いられていた移動平均法 (moving average) をベースとしつつ、実際の時系列データの処理に際して生じる問題を実務的に処理するために、途中の計算アルゴリズムを次々に複雑化していった。1950 年代から 1960 年代にかけて国際的にも官庁統計家の間では季節調整法を開発しようとする機運が高まり、ヨーロッパ主要国の官庁当局や日本の中央官庁によっても幾つかの季節調整プログラムが開発されている。日本では当時の通商産業省が MITI 法と呼ばれる季節調整法、当時の経済企画庁は EPA 法という季節調整法を開発し、それぞれ実際に運用していた。これら二つの季節調整プログラムもまたセンサス局 I 法と同様に、移動平均法を中心のアイデアとしつつも、独自に様々な工夫を施した方法であったが、ＥＰＡ法は 1978 年に運用を中止し、MITI 法は 1998 年に運用が中止された。ヨーロッパでもドイツのブンデス・バンク法や英国中央銀行の季節調整法などが開発されていたが、近年でもヨーロッパ統計局を中心に研究・開発が行なわれている。ここでは例えば統計的信号抽出法 (signal extraction method) を理論的背景として、TRAM-SEATS と呼ばれる季節調整法がスペイン中央銀行の A.Maravel(マラベル）により開発されていることに言及しておく。

再び話題を米国センサス局における 1960 年代の開発動向に戻すと、センサス I 法を開発した後も改良を重ね、改訂版が開発されたが一連の方法は実験用（Experimental methods）という意味でのセンサス局 II 法の X シリーズという名前になり、改良結果として 1965 年（解説マニュアル Shiskin et. al. (1967) は内部資料として発行）にセンサス局 X-11 法と呼ばれる季節調整法が開発された。この X-11 は当時、ようやく一般に利用可能となってきた（メイン・フレーム）計算機の利用を想定したものでフォートラン（FORTRAN）

言語でプログラムが書かれたが、そのプログラムを関係者が配布を受けて利用できる形をとった。こうした開発の動きの中で、1970 年頃からわが国では日本銀行をはじめ季節性を持つ経済データを公表している経済関係の中央官庁が、このセンサス局法 X-11 法を採用して季節調整系列を公表することが多くなった。ただし、センサス局 X-11 法はその内部にかなり複雑なオプションを含んでいた。その後、多くの官庁では季節調整法として X-11 法を採用したが、各官庁がどの様に X-11 法のオプションを利用していたかについては、一般に公開されてはいなかった。

2.2 移動平均法と X-11 法

センサス局 X-11 法における統計的手続きはかなり複雑であるが、基本的には移動平均 (moving average) に基づき時系列データを平滑化 (smoothing) することにより季節性を除去することが意図されている。一般に原系列に移動平均をかけるとは、原時系列 $\{Y_t\}$ から調整系列 $\{Y_t^*\}$ を

$$Y_t^* = \sum_{i=-m}^{n} w(i) Y_{t+i} \tag{2}$$

により変換する方法である。ここでウエイト係数 (あるいはフィルタ関数) $\{w(i), i = -m, \cdots, n\}$($m$ と n は正整数) は通常は観測される時刻 t には依存させないが、基準化規則 $\sum_{i=-m}^{n} w(i) = 1$ を満たすとしても、様々な移動平均フィルターが考えられる。

ここで月次データを取って説明しよう。仮に 2000 年 1 月より 2000 年 12 月のデータの 12ヶ月平均値 $(1/12)\sum_{i=1}^{12} Y_{t+i}$ (t=1999 年 12 月にとる) は 12 が偶数なので、2000 年 6.5 月が対応する月と考えられる。また 2000 年 2 月より 2001 年 1 月のデータの 12ヶ月平均値 $(1/12)\sum_{i=1}^{12} Y_{t+1+i}$ は 2000 年 7.5 月に対応すると考えられよう。さらに二つの平均値を平均すると

$$\frac{1}{2}[\frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} Y_{t+i} + \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} Y_{t+i+1}] = \frac{1}{24}Y_{(t+7)-6} + \frac{1}{12}\sum_{i=-5}^{5} Y_{(t+7)+i} + \frac{1}{24}Y_{(t+7)+6} \tag{3}$$

と表現できる。したがって、$t = 1999$ 年 12 月 とすると $t + 7 = 2000$ 年 7 月 に対応する移動平均値と解釈できる。この 13 項移動平均であるフィルタ関数は二つの 12ヶ月平均の平均であるから中心化 12 項 (centered 12 terms) 移動平均と呼ばれている。ここで、ラグ (遅れ) 作用素の記号 $\mathcal{B}$ を用いると、例えば時系列 Y_t に対して $\mathcal{B}Y_t = Y_{t-1}, \mathcal{B}^2 Y_t = \mathcal{B}Y_{t-1} = Y_{t-2}, \mathcal{B}^{-1}Y_t = Y_{t+1}$ などとなる。ラグ作用素を用いると中心化 12 項移動平均は $M_{2,12}(\mathcal{B}) = (1/2)[(1/12)\sum_{i=-6}^{5}\mathcal{B}^i + (1/12)\sum_{i=-5}^{6}\mathcal{B}^i]$ で与えられる。さらに、3×3 移動平均と 3×5 移動平均はそれぞれ $M_{3\times 3}(\mathcal{B}) = (1/9)(\mathcal{B}^{-12} + 1 + \mathcal{B}^{12})(\mathcal{B}^{-12} + 1 + \mathcal{B}^{12})$, $M_{3\times 5}(\mathcal{B}) = (1/15)(\mathcal{B}^{-12} + 1 + \mathcal{B}^{12})(\mathcal{B}^{-24} + \mathcal{B}^{-12} + 1 + \mathcal{B}^{12} + \mathcal{B}^{24})$ により定める。

次に X-11 における移動平均操作による時系列データの処理の概略を要約[2]しておこう。ある時刻 t における原系列 Y_t を構成するトレンド・循環変動項 TC_t，季節変動項 S_t，曜日効果 TD_t，不規則変動項 I_t の推定アルゴリズムではまず次の 4 ステップを考える。(1) 中心化 12 項移動平均でトレンド・循環成分の推定値 $\hat{TC}_t$）を抽出する。(2) 季節・不規則成分 $S_t \times I_t$ の推定値を $Y_t/\hat{TC}_t$ で求める。(3) 季節・不規則成分の推定値より 3×3

[2] ここで説明した X-11 のアルゴリズムの詳細については経済企画庁 (1971)、黒川 (1979) が説明している。

移動平均により季節成分の推定値 $\hat{S}_t$ を求める。(4) 季節調整値を $Y_t/\hat{S}_t$ により求める。さらに、同様の 4 ステップを中心化 12 項移動平均を Henderson の 13 項移動平均[3]、3×3 移動平均を 3×5 移動平均に変更して実行することで合計 8 ステップからなる基本処理操作が得られる。次に X-11 プログラムではこうした 8 ステップからなるアルゴリズムをはずれ値の補正と最終的季節調整値の作成のためにそれぞれ適用し、細部は多少の差異はあるものの、合計 3 回適用される。こうした複雑な移動平均が X-11 プログラムの基本的な構成となっている。したがって、X-11 アルゴリズムとは時系列データに移動平均操作を繰り返し施すことにより、原系列を平滑化している操作と解釈できよう。

ところで、Henderson の $2m+1$ 項移動平均とは

$$
\begin{aligned}
(4) \qquad w(i) &= c_m[(m+1)^2-i^2][(m+2)^2-i^2][(m+3)^2-i^2] \\
&\quad \times[3(m+2)^2-16-11i^2]
\end{aligned}
$$

で与えられる線形フィルタ関数である。ただし c_m は m に依存する定数であるが、この係数は制約条件 $\sum_{i=-m}^{m} w(i)=1, \sum_{i=-m}^{m} i^2 w(i)=0, w(i)=0\ (m+1\le|i|\le m+3)$ のもとで 3 次階差 $\sum_{i=-m}^{m}(\Delta^3 w(i))^2$ を最小化する解として得られる。（ここで階差記号 Δ は $\Delta w(i)=w(i)-w(i-1)$ を意味し、3 次階差は $\Delta^3 w(i)=\Delta^2(w(i)-w(i-1))= w(i)-3w(i-1)+3w(i-2)-w(i-3)$ である。）このような操作により滑らかに変動するトレンド成分と循環成分を局所的に推定し、逐次的に妥当な季節調整値を構成していると解釈されよう。

ここで原系列 $\{Y_t\}$ に対して移動平均を用いる時には結果として得られる調整系列では末端の部分が欠けることになる．例えば、原系列 $\{Y_t\}$ が期間 $t=1,\cdots,T$ に得られるときに $2m+1$ 項移動平均を用いると最初と最後の m 時点では移動平均値を計算することができない。すなわち，時刻 $t=T-k\ (k=0,\cdots,m-1)$ における移動平均は $X_t=\sum_{i=-m}^{k} w(i)Y_{t+i}$ としてしか計算することができないのである。したがって，この場合には線形フィルタ関数を用いても対称性の条件 $w(i)=w(-i)$ を満たすことができないので非対称移動平均を用いることになる。センサス局 X-11 法では期初及び期末の原データに対しては，ここで仮に Musgrave 移動平均と呼ぶ非対称フィルターを用いているとみなすことができるが、この線形フィルタ関数は次のようにして対称フィルター $\{w(i)\}$ から導かれると考えられる．原系列 $\{Y_t\}$ に対して時間の 1 次関数 $P_1(t)$ のトレンドと互いに独立で正規分布にしたがう期待値ゼロ，分散一定の誤差 $\{a_t\}$ から構成される加法的モデル $Y_t=P_1(t)+a_t$ を仮定した上で損失関数

$$
(5) \qquad E[\sum_{i=-m}^{m} w(i)y_{t+i}-\sum_{i=-m}^{m-d} v_d(i)y_{t+i}]^2
$$

を最小にするようにフィルタ関数 $\{v_d(i)\}$ を決めることが考えられている。このフィルタは Musgrave の移動平均と呼ばれるが、この非対称フィルタ関数は対称移動平均に対するある種の最適近似となっている（Findley et. al. (1996) を参照）。ただし、必ずしも Henderson のフィルタ関数の議論と整合的でないことには注意を要する。

なお、統計的時系列の理論を用いると、X-11 法で利用されている移動平均フィルターを

[3]より正確には計算される SI 比に応じて 9 項、13 項、23 項のいずれかの Henderson の移動平均が選択されるが、X-11 法の原プログラムとを X-12-ARIMA 法の改良 X-11 プログラムで多少の変更がある。(Findley et. al. (1998) を参照。)

用いると原系列における季節周波数近くでのスペクトル密度関数のピークが平滑化されることが分かるが、複雑な線形移動平均の非線形的な組み合わせであるので、その妥当性については必ずしも明らかではないことに注意しておく。

さて、X-11 アルゴリズムでは曜日変動項 TD_t や不規則変動項 I_t については、季節成分を一度推定した上でさらに不規則成分に対して回帰分析を利用した幾つかの付加的処理を行うことが、オプションとして実行することができる。実際の季節調整では異常値や曜日効果の処理などの処理も重要となるが、実際の官庁統計の運用における各統計担当者が実行していた処理の詳細には不透明な要素もあったように判断されよう。

3　X-12-ARIMA 法

3.1　X-12-ARIMA の開発

統計的時系列分析の分野では 1970 年代にはボックス・ジェンキンズ (Box and Jekins (1976)) が提唱した線形時系列モデルとしての ARMA（自己回帰移動平均）モデルにもとづく予測の方法が実用化されたことが重要である。時間領域における扱いやすい線形時系列モデルが実用化された機運の中で、カナダ・センサス局のダグン（E.Dagun）を中心にセンサス局 X-11-ARIMA と呼ばれる季節調整法プログラムが 1975 年頃に開発された。この方法が X-11 法と異なる主要な機能は ARIMA モデルを用いた予測系列を利用する事で季節調整の際に生じる末端処理の問題を改善しようとしたことにあった。この X-11-ARIMA 法はカナダ統計局ではかなり実用的にも用いられていたが、米国や日本を始めとする他の国々の官庁統計ではそれほど用いられなかった。

1980 年代後半になると計算機を取り巻く環境が劇的に変化するとともに、米国センサス局においても再び季節調整法の検討が始まり、時系列解析研究グループにより X-12-ARIMA プログラムが開発された。このプログラムは X-11-ARIMA 法をさらに改良し、次に説明する RegARIMA モデルを原系列に適用し、時系列の将来の予測値を利用して平滑化により季節調整値を得ようとする方法である。すなわち、X-12-ARIMA 法とは X-11-ARIMA 法に回帰分析を利用した様々な統計的機能を付け加えることで、さらに利用者が様々なオプションを比較的簡単な操作で実行する事ができるようにした特長がある。さらに、X-12-ARIMA は 1990 年代になって実現し始めたインターネットを利用した不特定多数のユーザーに対するプログラム配布という形で 1996 年に X-12-ARIMA(β-Version) が公開 (http:www.census.go.jp)、配布され始めた。このとき配布されたものは β-Version という名前が付いているように実験用プログラムであり、その後しばらく頻繁に改良が重ねられ、2000 年頃に X-12-ARIMA という名前になり現在（2005 年 12 月）では Version0-2-10 となっている。

なお、X-12-ARIMA において利用する可能な様々なオプションを応用するには様々な統計的問題が付随することを付け加えておく（国友 (2001) や国友編 (2004, 2006) を参照)。日本の官庁統計では 1996 年頃の総務庁・統計審議会により設置された季節調整検討小委員会での検討を経て、「季節調整法の適用について (指針、平成 9 年 6 月 20 日)」が出されているが、各統計作成の担当者が X-11, X-12-ARIMA, DECOMP などを注意深く利用し、さらに適用するオプションを開示することになっている。

3.2 RegARIMA モデルの利用を巡る問題

X-12-ARIMA プログラムによる季節調整値の作成法はおおよそ次のような 3 ステップに要約することができる。

(1) 観察される時系列の原データ $\{Y_t,\ 1 \le t \le T\}$ からまず RegARIMA モデルと呼ばれている統計的モデリングを用いて将来の予測値 (forecasts)，過去の逆予測値 (backcasts) を作り出す。同じモデルの中の回帰 (regression) モデルを用いて季節調整に先だって様々な事前調整を行い，事前調整系列 $\{Y_t^*,\ -H+1 \le t \le T+H\}$ を作り出す．ここで $H\ (\ge 1)$ は事前に設定する予測期間である。この事前調整としては異常値・変化点の検出，閏年調整，曜日効果調整，休日調整などの項目を挙げることができる。RegARIMA モデルを用いる統計的モデリングではモデル診断と呼ばれている一連の操作により様々なモデルの選択を行う。(2) 次に予測値と逆予測値を含む事前調整された系列 $\{Y_t^*\}$ に対し改良された X-11 プログラムにより季節調整を行い，季節調整系列 $\{X_t,\ 1 \le t \le T\}$ が作り出される．この部分は従来から利用可能な X-11 法プログラムを手直しした改良 X-11 プログラムにより実行されるが，基本的には原 X-11 法と同一の手続きで行われると見なすことができる。(3) 最後に診断と呼ばれる部分により季節調整を行った結果を評価する。この為に季節調整系列の推定から求められた不規則変動の推定値としての残差系列から、スペクトル密度関数や調整系列の安定性に関する新しい指標などいくつかの統計量が計算される。

以上の説明から明らかなように RegARIMA モデルと呼ばれている統計的モデリングが X-12-ARIMA 法の最大の特長である。RegARIMA モデルでは 1 次元の時系列データを生成する確率変数の組 $\{Y_t\}$ とすると、$\{Y_t\}$ が r 個の説明変数 $\{X_{it}\}$ を伴い線形時系列表現

$$\phi_p(\mathcal{B})\Phi_P(\mathcal{B}^s)\,(1-\mathcal{B})^d\,(1-\mathcal{B}^s)^D\,(Y_t - \sum_{i=1}^{r}\beta_i X_{it}) = \theta_q(\mathcal{B})\Theta_Q(\mathcal{B}^s)a_t \qquad (6)$$

を持つことを想定される。ただし、$\mathcal{B}$ は時系列 Y_t に対してラグ記号、季節周期を表す $s=$ (4 あるいは 12), 係数の次数 p,d,q,P,D,Q はあらかじめ決められた非負整数である。また $\phi_p(z) = 1-\phi_1 z \cdots - \phi_p z^p$, $\Phi_p(z) = 1-\Phi_1 z \cdots - \Phi_p z^P$, $\theta_q(z) = 1-\theta_1 z \cdots - \theta_q z^q$, $\Theta_Q(z) = 1-\Theta_1 z \cdots - \Theta_Q z^Q$ は z についての多項式を表し、$\Phi(\mathcal{B}^s), \Theta(\mathcal{B}^s)$ 例えば $\mathcal{B}^s$ $(\mathcal{B}^s y_t = y_{t-s})$ の多項式となる。係数 $\beta_i\ (i=1,\cdots,r)$, $\phi_i\ (i=1,\cdots,p)$, $\Phi_i\ (i=1,\cdots,P)$, $\theta_i\ (i=1,\cdots,q)$, $\Theta_i\ (i=1,\cdots,Q)$ は利用可能な時系列データから統計的に推定される未知母数である．誤差項 $\{a_t\}$ は期待値ゼロ, 分散 σ^2 (σは未知母数とする) であり，各 t について互いに独立な確率変数列と仮定される。

この RegARIMA モデルは統計モデルとしては線形回帰 (linear regression) モデルと季節 ARIMA(時系列) モデルの混合型統計モデルの一つとして理解できる。ここで ARIMA とは ARIMA(autoregressive integrated moving average 自己回帰和分移動平均) モデルの略であるが、同時に季節 (seasonal)ARIMA モデルをも含んでいると見なすことができる。例えば (6) 式において $D=0, \Phi_P(z) = \Theta_Q(z) = 1$ とおけば ARIMA モデルとなるので、季節 ARIMA モデルは季節性を含む ARIMA モデルの特殊な場合であり，より少ない数の母数で季節性を含む経済時系列の変動を表現する意味での節約型の時系列モデルと解釈される。この季節 ARIMA モデルはしばしば $(p,d,q)\times(P,D,Q)_s$ と表される。季節 ARIMA モデルでは固有方程式 $|\lambda^p - \sum_{i=1}^{p}\lambda^{p-i}\phi_i| = 0$, $|\lambda^q - \sum_{i=1}^{q}\lambda^{q-i}\theta_i| = 0$,

$|\lambda^P - \sum_{i=1}^{P} \lambda^{P-i}\Phi_i| = 0,\ |\lambda^Q - \sum_{i=1}^{Q} \lambda^{Q-i}\Theta_i| = 0$ に関して、固有方程式を満足する固有値を $\lambda_i\ (i = 1, \cdots, p + P + q + Q)$ とすると定常条件 $|\lambda_i| < 1$、及び方程式に共通根は無いことが仮定される。

ここで注意すべき点としては、標準的な統計的時系列分析では回帰モデルには定常時系列構造を導入する[4]ことがより一般的な方法であるが、RegARIMA モデルでは非定常時系列モデルをそのまま導入していることである。したがって、統計的処理では非正則問題が発生することになるが、詳細については例えば国友・高岡 (2005) を参照されたい。この RegARIMA モデルは階差系列に対して最尤推定法 (maximum likelihood method) により推定されるが、推定された母数を使えば統計的時系列モデルにもとづく予測を容易に行うことができる。したがって、予測値を利用することで直近のデータに対しても対称移動平均を直接に適用することができることになる。ただし、結果として得られるフィルターは推定された季節 ARIMA モデルに依存するので、結局は原系列に対して非対称移動平均を行っているが、推定された季節 ARIMA モデルの予測値が適切であれば Musgrave 移動平均よりもよい結果が得られる可能性がある。

さらに、X-12-ARIMA プログラムの特長としては、RegARIMA モデルの回帰部分を利用して様々な処理が容易に実行できることに言及する必要があろう。X-12-ARIMA 法では、異常値や変化点の処理、曜日効果（trading days effects）や休日数 (holidays effects)・閏年効果の処理を予測値を作成する段階で RegARIMA モデルを利用して行うことが特徴であろう。むろん、X-11 パートでも類似の処理が可能であるが、RegARIMA における回帰変数の定義など詳しいオプションは国友編 (2004) に説明されている。

4 Decomp と X-12-ARIMA

季節調整法としてはセンサス局法以外にもこれまでに様々な統計的方法[5]が開発されている。ここでは特に X-12-ARIMA でのアルゴリズムを理論的に解釈する上で有用であるので Decomp 法を説明しておこう。この時系列解析プログラムの前身としては、統計数理研究所の赤池弘次・石黒真木夫により 1980 年代に季節調整法 Baysea が開発されたことが挙げられる。Baysea は伝統的な季節調整法の基礎をなす移動平均法とは異なり、時系列において季節性に関する滑らかさの事前情報[6]を直接的に活用して時系列成分分解を行うことにより季節性を推定する方法である。Baysea はその後同研究所の北川源四郎（北川 (1993)）により改良され、1987 年に状態空間モデルに基づく季節調整プログラム DECOMP が開発された。さらに、同研究所の佐藤整尚により 1998 年に Web-decomp が開発されインターネットの Web 上（http://ssnt.ism.ac.jp）から統計計算を容易に実行できるように改良され今日に至っている。

ここでは季節調整問題のために Decomp において循環成分と曜日効果をゼロとして、加法的な時系列成分の分解モデル $Y_t = TC_t + S_t + I_t$ を考察しよう。このとき、トレンド成分の差分 $\Delta TC_t = TC_t - TC_{t-1}$ の変動が小さく、d 階差分 $\Delta^d TC_t = \Delta^{d-1}[TC_t - TC_{t-1}] = u_{1t}$

[4]統計的時系列解析の標準的教科書としては、例えば Fuller (1996) を挙げておく。

[5]例えば近年における季節調整を巡る研究の動向については統計数理 (1997) 収録の諸論文が参考となろう。

[6]時系列解析プログラム Baysea と Decomp については、開発者による統計学的アイデアの説明としては、赤池 (1989) や北川 (1993) があるが、本稿での説明は少し異なっていることに注意しておく。

が $N(0,\tau_1^2)$ の互いに独立な確率変数、季節成分は制約 $\sum_{j=0}^{s-1} S_{t-j} = u_{2t}$(季節ラグ s は 4 か 12) が $N(0,\tau_2^2)$ の互いに独立な確率変数と見なすことになる。したがって、トレンド成分の階差成分が徐々に変動し $\Delta^d TC_t \cong 0$、同時に季節成分には $\sum_{j=0}^{s-1} S_{t-j} \cong 0$ となる制約条件を課すことを意味している。次に不規則変動成分を u_{4t} を $N(0,\tau_4^2)$ の互いに独立な確率変数と見なせば、観測時系列 Y_t は観測方程式 (measurement equation) は

(7) $$Y_t = \mathbf{H}\mathbf{x}_t \quad + u_{4t}$$

であり、$(1\times(d+s-1))$ 状態ベクトルは $\mathbf{x}_t' = (TC_t,\cdots,TC_{t-(d-1)},S_t,\cdots,S_{t-(s-2)})$, $\mathbf{H} = (1,0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)$ と表現される。ここで、状態ベクトルについては適当に誤差ベクトル $\mathbf{v}_t' = (u_{1t},u_{2t})$,（要素にゼロ成分を含む）既知行列 $\mathbf{F}$ と $\mathbf{G}$ を適切に選べば

(8) $$\mathbf{x}_t = \mathbf{F}\mathbf{x}_t + \mathbf{G}\mathbf{v}_t$$

という状態方程式 (state equation) を得ることができる。例えばここで 2 次のトレンド階差を四半期データに適用すれば、$d=2, s=4$ 及び $\mathbf{H}=(1,0,1,0,0)$,
$\mathbf{x}_t' = (TC_t,TC_{t-1},S_t,S_{t-1},S_{t-2})$ を用いて

$$\begin{pmatrix} TC_t \\ TC_{t-1} \\ S_t \\ S_{t-1} \\ S_{t-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} TC_{t-1} \\ TC_{t-2} \\ S_{t-1} \\ S_{t-2} \\ S_{t-3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{pmatrix}$$

という状態空間表現が得られる。
さらに、不規則変動 (u_{4t}) の分散及び 2 つの誤差分散比を母数（ハイパー・パラメターと呼ばれる）としてガウス過程を仮定した上で、状態方程式で表現された制約条件付き最尤推定 (maximum likelihood) 法を実行して推定を行うのが Decomp の基本的計算アルゴリズムである。季節成分はフィルタリングによる状態変数ベクトルの最適な推定値として得られるので、観測値を季節成分の推定値で割れば、季節調整系列を求めることができる。ここで現れた二つの線形方程式よりなる状態空間表現 (state space representation) では状態方程式と観測方程式が線形であるので、北川 (1993) が説明しているようにカルマン・フィルターを利用することが可能である。

ここで図１で例として用いた法人売上高 (全産業) に対して Decomp を利用して季節成分を推定し、得られた季節調整値を図２〜図４に示しておく。ここでのデータ分析では原系列を対数変換し、トレンド次数 d =2、AR 次数はゼロ、曜日効果なし[7] と設定して計算した結果を示す。こうして Decomp を用いて求めた季節調整値と X-12-ARIMA 法に基づいて計算されているはずの公表数値 (2005 年 12 月現在) を比べたてみよう。しばしば、経済分析では水準そのものよりも増加率の数値に関心が集中するので、公表季節調整値による前期比と Decomp 季節調整値による前期比を比べてみると（図３）、両方の数値は実用上では問題とならないほど極めて近いことが分かる。こうした結果は背後に想

[7]なお、Decomp ではより一般に循環変動や曜日変動を含めることも実用化されている。ただし、不用意に循環変動項を組み入れて季節調整値を求めると X-12-ARIMA により得られる季節調整値と食い違いが生じるとの報告もあるが (例えば「統計数理 (1997)」を参照)、それは想定している時系列分解モデルが異なるので、当然の帰結と解釈すべきであろう。

定されている時系列分解の次数が適切であれば一般的に成り立つことを国友 (2001) が指摘している。ここで利用した Decomp モデルはラグ作用素により

$$Y_t = \frac{1}{(1-\mathcal{B})^2} u_{1t} + \frac{1-\mathcal{B}}{1-\mathcal{B}^s} u_{2t} + u_{4t} \tag{9}$$

で与えられる。したがって、確率過程 Y_t の表現

$$(1-\mathcal{B})(1-\mathcal{B}^s) Y_t = (\sum_{i=0}^{s-1} \mathcal{B}^i) u_{1t} + (1-\mathcal{B})^2 u_{2t} + (1-\mathcal{B})(1-\mathcal{B}^s) u_{4t} \tag{10}$$

が得られる。ここで右辺 $v_t = (\sum_{i=0}^{s-1} \mathcal{B}^i) u_{1t} + (1-\mathcal{B})^2 u_{2t} + (1-\mathcal{B})(1-\mathcal{B}^s) u_{4t}$ は MA(s+1) 過程となるので、確率過程 Y_t は $ARIMA(0,1,s+1) \times (0,1,0)_s$ 表現を持つと解釈できる。すなわち、Decomp モデルでは観測時系列が季節的線形構造を持つ d 次和分過程 (integrated process) $I(d)$ の実現値であることを仮定した上で、状態推定に最適フィルタリングを適用したと解釈できるのである。

< 図 2〜図 4：法人企業の売上高（四半期）の季節分解と季節調整値 >

5　季節調整と計量経済分析

ここで計量経済分析において経済季節性と季節調整法に関連する幾つかの重要事項についてまとめておこう。計量経済学では季節性を正面から取り上げる研究はこれまでそれほど多くはなかった。考えられる一つの理由としては、伝統的な経済学の議論では実際に観察される経済時系列における季節性に関して、理論的な分析はあまり行われていなかったことを挙げることができよう。これまで経済学的な分析があまりなされてないので、観察される季節性は、経済理論を実証する上では、前もって適切な統計的方法により処理しておけばよい問題、と理解している経済学者やエコノミストも少なくないと判断できる。実際、季節調整値を実証分析に利用している経済学者やエコノミストの大部分は実証分析で使っている数値が実際にどのような季節調整の結果得られたのかをほとんど理解していないようにも判断できる。他方、米国や日本の官庁統計の作成担当者は公的時系列データの作成と公表という実務的目的のために、かなり複雑な内容の季節調整法を実用に供しているが、RegARIMA モデルに集約されるような統計的時系列解析について専門的知識が欠けている場合も少なくないと思われる。

ところで、経済時系列において季節変動を定義することは、年始のコンビニの営業や夏期休暇の取り方の変化など、時間とともに変化する局所的季節性まで考慮するとそれほど簡単なことではない。例えば経済時系列における局所的季節変動を表現する様々な確率過程モデルを考えることも可能である。最近でも、経済時系列における季節要素に関する統計モデルについては Box=Jenkins (1976) が開発した線形時系列モデルとは限らず、非定常性や非線形性などについての統計学的考察を含む様々な研究が行われている。例えば Box=Jenkins 法で実用化された季節 ARIMA モデルは比較的簡単な線形非定常モデルであるが、観察される季節性を $I(d)$(d は 1 以上の整数) ではない確率過程と見た方がよいとする考え方もあり得る。こうした統計学的な基本的問題については、例えば高岡 (2002)、国友・高岡 (2005) が議論しているが、経済時系列における季節性の統計的分析法と季節調整法については、なお重要な未解決な問題がある。

また、多くの官庁統計で実際に採用されているのは X-12-ARIMA と呼ばれるセンサス局が開発した季節調整法であるが、この方法では様々な統計的モデルが複雑に利用されていることに注意する必要がある。X-12-ARIMA による時系列フィルターを直接的に明快に理解することは困難であるが、前節で示したように、Decomp により極めて類似した季節調整値が簡単に得られることは重要な意味を持っている。Decomp は統計学的にはすっきりした理論的構造を持っているので、その推定した季節調整値の解釈も比較的容易である。実は季節調整法としてもっとも一般に利用されている X-12-ARIMA 法はトレンド・循環項、季節項、不規則変動について簡単な成分分解を複雑な計算過程として経験的に（長年の知恵とカンにより）実行している、と解釈できるのである。

最後に、計量経済分析についての季節性の扱いについての注意点について言及しておこう。本稿では既存の官庁統計は、線形時系列モデルを組み込んだ複雑な操作が実用に供され季節調整値を作成、公表していることを指摘した。このことからは、例えば季節調整系列を利用して時系列モデルを用いた実証研究については、その経済学的意味や解釈については特に注意を要するということになろう。しばしば、季節調整値を利用した実証結果が原系列を利用した実証結果が大きく異なることが報告されている。本稿での議論をふまえるならば、このことの理由もほぼ明らかであろう。経済時系列における季節性と季節調整法の研究や開発を巡りさらなる展開や議論が期待される。

参考文献

[1] Anderson, T.W. (1971), *The Statistical Analysis of Time Series*, John-Wiley.

[2] 赤池弘次 (1989), 「事前分布の選択とその応用」, 鈴木・国友編「ベイズ統計学とその応用」東京大学出版会.

[3] 北川源四郎 (1993),”時系列プログラミング,”岩波書店.

[4] 経済企画庁経済研究所 (1971), 「季節変動調整法」研究シリーズ 22.

[5] 黒川恒雄 (1979), 「経済時系列の分析とその季節変動の調整」(1)〜(12)、統計, 日本統計協会.

[6] ハーベイ (1986), 「時系列モデル入門」（国友直人・山本拓訳）東京大学出版会。

[7] 国友直人 (2001),”季節調整法 X-12-ARIMA(2000) の利用：法人企業統計の事例,”経済学論集 Vo.67-3.

[8] 国友直人編 (2004),”解説 X-12-ARIMA(2002),”研究報告 CIRJE-R-1, 東京大学経済学研究科・日本経済国際共同研究センター (CIRJE)。

[9] 国友直人・高岡慎 (2005),”経済季節性と季節転換時系列モデル,” 日本統計学会誌, Vol. 35-1, 1-26。

[10] 国友直人編 (2006),”季節調整法 X-12-ARIMA と日本の官庁統計,” 研究報告 CIRJE-R-5, 東京大学経済学研究科・日本経済国際共同研究センター (CIRJE)。

[11] 北川源四郎 (1993),”時系列プログラミング,” 岩波書店。

[12] 溝口敏行・刈屋武昭 (1983), 「経済時系列入門」日本経済新聞社.

[13] 高岡慎 (2002),"曜日効果の識別と確率モデル," 日本統計学会誌 Vo.32-2, 327-343.

[14] 統計数理 (1997)"季節調整法特集," 統計数理研究所.

[15] Findley, D., Monsell, B., Bell, W., Otto, M. and Chen, B. (1998),"New Capabilities and Methods of the X-12-ARIMA Seasonal Adjustment Program," *Journal of Business and Economic Statistics*, 16, 127-177.

[16] Fuller, W. (1996) *Introduction to Statistical Time Series*, 2nd Edition, John-Wiley.

[17] Nerlove, M, D. Grether, and Carvalho, J. (1979), *Analysis of Economic Time Series*, Academic Press.

[18] Shiskin, J., A. H. Young, and J.C. Musgrave (1967), "The X-12 Variant of the Census Method II Seasonal Adjustment Program," Technical Report No. 15, U.S. Census Bureau, Department of Commerce.

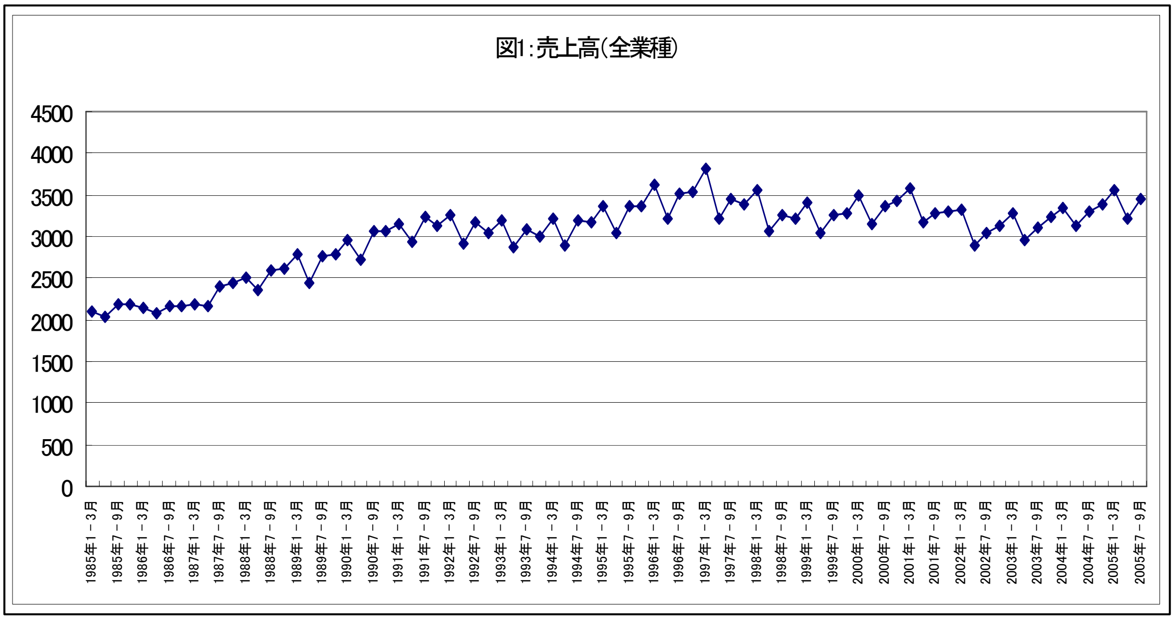

図1：売上高（全業種）

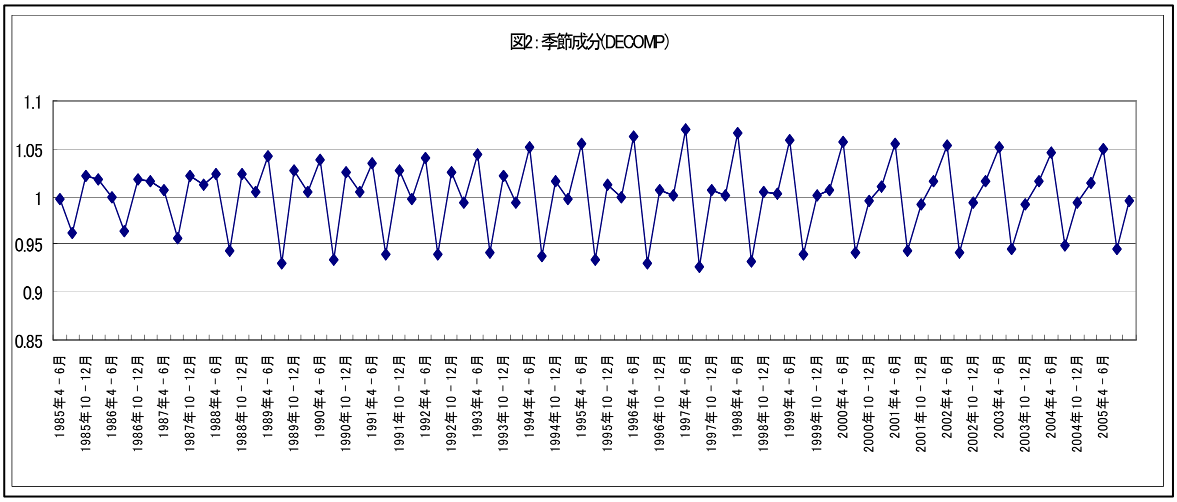

図2：季節成分（DECOMP）

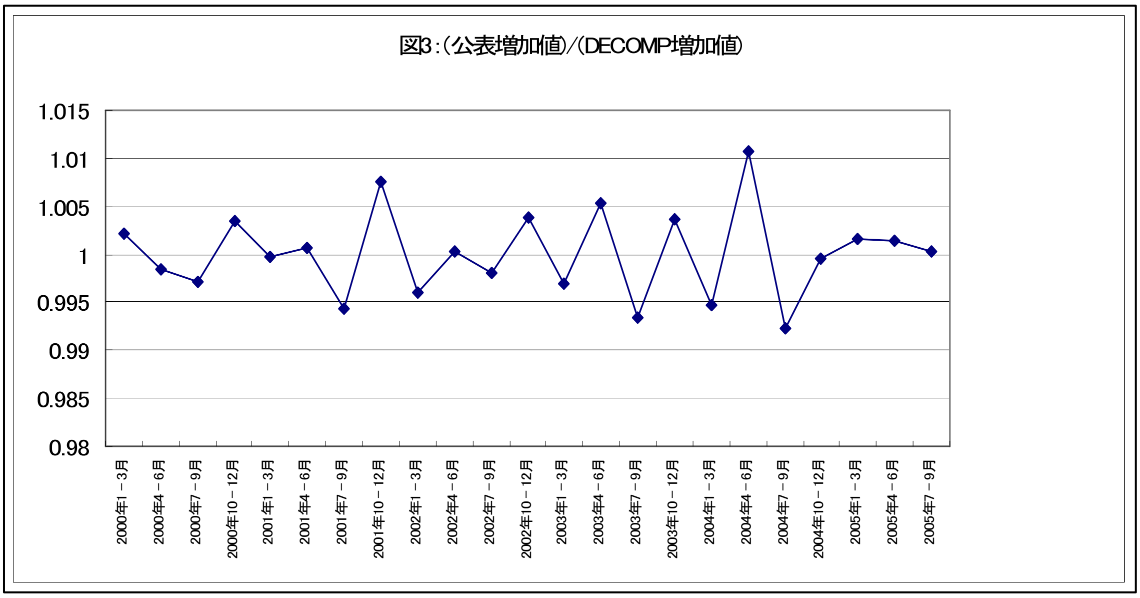

図3：（公表増加値）/（DECOMP増加値）

図4：季節調整値(前期比)
1.06
1.04
1.02
1
0.98
0.96
0.94
0.92
1985年4－6月
1985年10－12月
1986年4－6月
1986年10－12月
1987年4－6月
1987年10－12月
1988年4－6月
1988年10－12月
1989年4－6月
1989年10－12月
1990年4－6月
1990年10－12月
1991年4－6月
1991年10－12月
1992年4－6月
1992年10－12月
1993年4－6月
1993年10－12月
1994年4－6月
1994年10－12月
1995年4－6月
1995年10－12月
1996年4－6月
1996年10－12月
1997年4－6月
1997年10－12月
1998年4－6月
1998年10－12月
1999年4－6月
1999年10－12月
2000年4－6月
2000年10－12月
2001年4－6月
2001年10－12月
2002年4－6月
2002年10－12月
2003年4－6月
2003年10－12月
2004年4－6月
2004年10－12月
2005年4－6月