

TOPIX 現物の Realized Volatility と Realized Range-Based Volatility の分析*

高橋 慎

東京大学大学院経済学研究科
ee077008@mail.ecc.u-tokyo.ac.jp

平成 20 年 7 月 3 日

概要

本稿では TOPIX 現物の高頻度データから計算される Realized Volatility と Relized Range-Based Volatility に ARFIMA モデルと Unobserved Components (UC) モデルを適用し、モデルの当てはまりとボラティリティ予測のパフォーマンス比較を行った。最尤法により ARFIMA モデルと UC モデルのパラメータを推定し、RV と RRV を真のボラティリティの代理変数として標本内予測、標本外予測を様々な指標で比較した結果、RV と RRV 及びそれらの対数値の定式化において、ARFIMA モデルは UC モデルよりも優れていることが示された。また、標本内予測については RRV を用いた ARFIMA モデルの、標本外予測については RV を用いた ARFIMA モデルのボラティリティ予測力が高いことが示された。さらに、マルコフ連鎖モンテカルロ法によるベイズ分析も行い、ARFIMA モデルの実数差分パラメータの事後分布から、RV 及び RRV の対数値は非定常な長期記憶過程に従っている可能性が高いという結果が得られた。加えて、ARFIMA モデルと UC モデルのデータへの適合度を周辺尤度と DIC を用いて比較し、標本外の予測力を様々な指標で評価した結果、全体的に ARFIMA モデルが優れていることが示された。

1 はじめに

ボラティリティ (volatility) は金融資産収益率の分散または標準偏差として定義され、日々変動することが知られている確率変数である。ボラティリティはオプション価格の導出や金融資産のリスク評価 (例えばバリュー・アット・リスク) に必要不可欠な重要な変数であるが、直接観測することができないため、その変動を定式化し将来のボラティリティを予測する研究が数多く行われている。

1980 年代から研究されてきたボラティリティの定式化は、主として 2 つのモデルに分けられる。ひとつは Engle [1982] の Autoregressive Conditional Heteroskedasticity (ARCH) モデルから始まり、それを一般化した Bollerslev [1986] の Generalized ARCH (GARCH) モデルに基づいて様々な改良が加えられたモデルで、GARCH 型モデルと呼ばれる¹。もうひとつは確率的ボラティリティ変動 (Stochastic Volatility; SV) モデルと呼ばれるもので、例えば Taylor [1986], Harvey/Ruiz/Shephard [1994], Shephard [1996] などがある。2 つのモデルはボラティリティについて異なる定式化を行っているが、日次あるいはより長期の収益率を用いているという点では共通している。

しかし、近年、高頻度データと呼ばれる金融資産の日中の取引価格を含むデータが入手可能となってきたことから、ボラティリティの分析手法は大きく変化した。Andersen/Bollerslev [1998] と Barndorff-Nielsen/Shephard [2001] はそれぞれ独立に、高頻度データから Realized Volatility (RV) と呼ばれるボラティリティの新たな推定量を提案し、RV が従来のボラティリティの代理変数として用いられてきた日次

*本稿を作成するに当たり、指導教員である大森裕浩准教授 (東京大学大学院経済学研究科) 並びに渡部敏明教授 (一橋大学経済研究所) の両氏から多くの助言を頂いた。また、下関市立大学で行われた FCS コンファレンス「計量経済学の最近の展開」の参加者の方々にも有益なご意見を頂いた。さらに、本稿の一部は石井記念証券研究振興財団と日本学術振興会による援助を受けて行われた。ここに記して深く感謝の意を表したい。

¹GARCH 型モデルについて詳しくは Bollerslev/Engle/Nelson [1994], 渡部 [2000] を参照されたい。

収益率の2乗よりもはるかに精度の高い推定量であることを示した。そのため、その後のボラティリティの定式化には GARCH 型モデルの説明変数に RV が加えられるようになり、Koopman/Jungbacker/Hol [2005] などは RV を用いることで GARCH 型モデルが大幅に改善されることを示している。

さらに、RV を直接定式化する研究も数多く行われている。Andersen/Bollerslev/Diebold/Ebens [2001a], Andersen/Bollerslev/Diebold/Labys [2001b] などにより、RV とその対数値が非常にゆっくりと減衰する自己相関関数を持つことはよく知られている。そこで、Andersen/Bollerslev/Diebold/Labys [2003] はこの長期依存性を捉えるために長期記憶過程のひとつである自己回帰実数分移動平均 (autoregressive fractionally integrated moving average; ARFIMA) モデルを RV に適用している。Andersen et al. [2003], Giot/Laurent [2004], Martens/Zein [2004], Pong/Shackleton/Taylor/Xu [2004] などは、RV を用いた ARFIMA モデルのボラティリティ予測力が、日次収益率を用いた GARCH 型モデル及び SV モデルよりもはるかに優れていることを示している。一方、Barndorff-Nielsen/Shephard [2002] は、ある仮定の下で ARMA(1,1) 過程に従う非観測要素の和として RV が表されることを示し、そのような短期記憶過程を組み合わせることで RV の長期依存性を捉える Unobserved Components (UC) モデルを提案している。Koopman et al. [2005] は ARFIMA モデルと UC モデルのボラティリティ予測力を比較し、ARFIMA モデルの方がわずかに優れているという結果を得ている。しかし、これまでのところ UC モデルの実証研究は少なく、RV の定式化にどちらが適しているかはまだ明らかではない。

また、Christensen/Podolskij [2007] と Martens/van Dijk [2007] は高頻度データを用いたボラティリティの新たな推定量として、日中収益率ではなく、日中のある期間のレンジ (高値と安値の差) を用いて計算される Realized Range-Based Volatility (RRV) と呼ばれる推定量を提案している。Christensen/Podolskij [2007] は RRV の漸近分散が RV のそれよりも小さく、RRV がボラティリティの推定量として有効であることを示している。実際のデータを用いた分析では、Martens/Dijk [2007] や吉田 [2007] は RRV を用いたモデルのボラティリティの予測力が RV に比べて高いという結果を得ている。しかし、RRV を用いた実証研究は RV に比べてあまり行われていない。

そこで、本稿では ARFIMA モデルと UC モデルを用いて東証株価指数 (TOPIX) の RV と RRV 及びそれらの対数値を分析した。基本統計量から、RRV は RV と同様の性質を持つことが示された。最尤法による推定では、ARFIMA モデルの実数差分パラメータは有意に 0 より大きく、RV と RRV 及びそれらの対数値は長期記憶過程に従っているという結果が得られた。また、ARFIMA モデルと UC モデルの RV と RRV 及びそれらの対数値への当てはまりを比較した結果、ARFIMA モデルが優れていることが示された。さらに、RV と RRV を真のボラティリティの代理変数として 2 つのモデルのボラティリティの標本内予測、標本外予測を比較し、ARFIMA モデルのボラティリティ予測力が高いという結果が得られた。特に、標本内予測については RRV を用いた ARFIMA モデルの、標本外予測については RV を用いた ARFIMA モデルのボラティリティ予測力が高いことが示された。加えて、マルコフ連鎖モンテカルロ (Markov chain Monte Carlo; MCMC) 法によるベイズ分析を行った結果、MCMC 法による各モデルのパラメータの事後平均は最尤推定値とほぼ等しく、MCMC 法によって得られた ARFIMA モデルの実数差分パラメータの事後分布から、特に RV と RRV の対数値が非定常な長期記憶過程に従っている可能性が高いことが示された。また、周辺尤度と Spiegelhalter/Best/Carlin/van der Linde [2002] の Deviance Information Criterion (DIC) を用いて ARFIMA モデルと UC モデルを比較した結果、どちらの指標についても ARFIMA モデルが優れているという結果が得られた。

以下に本稿の簡単な流れを示す。次節では、RV と RRV の定義と特性及びその計算方法を述べる。第 3 節では、ARFIMA モデルと UC モデルを説明する。続く第 4 節では、TOPIX 現物の高頻度データから計算した RV と RRV を用いた 2 つのモデルの推定・比較結果を示す。最後に第 5 節で結論を述べ本稿の締め括りとする。

2 高頻度データを用いたボラティリティの推定量

金融資産の s 時点における対数価格 $p(s)$ が次のような単純な連続過程に従っていると考える。

$$dp(s) = \sigma(s)dB(s). \quad (1)$$

ここで、 $\sigma^2(s)$ は瞬時的ボラティリティ (instantaneous volatility または spot volatility) と呼ばれ、局所二乗可積分な左連続で右極限を持つ (cádlág) 過程とする。また、 $B(s)$ は標準ブラウン運動で、 $\sigma^2(s)$ と $B(s)$ は確率的に独立であるとする。このとき、任意の区間 $[a, b]$ についてのボラティリティは

$$IV = \int_a^b \sigma^2(s) ds$$

のように定義され、Integrated Volatility (IV) と呼ばれる。以下では簡単化のため 1 日間を $[0, 1]$ とし、日次の真のボラティリティを

$$IV = \int_0^1 \sigma^2(s) ds$$

と表すこととする。

実際に瞬時的ボラティリティを観測することはできないので、真のボラティリティ IV も直接計算することはできない。したがって、観測されたデータを用いてボラティリティを推定する必要がある。これまでは、ボラティリティの推定量として日次収益率の 2 乗が用いられてきたが、近年入手可能となってきた高頻度データを用いることで IV をより高い精度で推定することが可能である。

高頻度データから計算される IV の推定量として、Andersen/Bollerslev [1998] と Barndorff-Nielsen/Shephard [2001] はそれぞれ独立に日中収益率の 2 乗和として計算される Realized Volatility (RV) を提案している。RV はそれ以後、ボラティリティのより精度の高い推定量として、多くの研究においてボラティリティの推定・定式化・予測に用いられてきた。

また、Christensen/Podolskij [2007] と Martens/Dijk [2007] は日中の各区間におけるレンジ (高値と安値の差) の 2 乗和として計算される Realized Range-Based Volatility (RRV) を提案している。Christensen/Podolskij [2007] と Martens/Dijk [2007] は RRV の標準偏差は RV のそれよりも低く、RRV は IV のより精度の高い推定量であることを示している。直感的には、レンジの有効性は収益率よりも多くの情報を含んでいることが多いことに起因すると思われる。例えば、ある観測期間 $[s, t]$ において価格が大きく変動したものの、 t 時点の価格が s 時点の価格に近かった場合、収益率は 0 に近くなり価格変動に関する情報をほとんどもたらさないのに対して、レンジはその期間のボラティリティの高さを示す情報を与えることができる。現在のところ RRV を用いた実証研究は RV に比べてあまり行われていないが、日本の株式について RRV を分析したものととして吉田 (2007) がある。

以下では、Christensen/Podolskij [2007] に従い RV と RRV の定義及びそれらの特性について説明する。また、RV と RRV を実際に計算する場合の問題点とその対処法について述べ、RV と RRV についてこれまで明らかとなった実証的な性質をいくつか示す。

2.1 Realized Volatility

任意の異なる観測時間 t_{i-1} と t_i ($0 \leq t_{i-1} < t_i \leq 1$) について、 $[t_{i-1}, t_i]$ 上の日中収益率を次のように表す。

$$r_{t_i, \Delta_i} = p(t_i) - p(t_{i-1}).$$

ここで、 $\Delta_i = t_i - t_{i-1}$ である。 $t_i = \Delta_i = 1$ のとき r_{t_i, Δ_i} は日次収益率となる。

今、1 日を $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ のように分割する。このとき、Hansen and Lunde (2005) の表記に従うと、観測時間 $\Xi = \{t_i | i = 0, 1, \dots, n\}$ (観測頻度 n) での RV は

$$RV^\Xi = \sum_{i=1}^n r_{t_i, \Delta_i}^2$$

と表される。2 次変分の理論から、RV は IV の一致推定量、すなわち、 $n \rightarrow \infty$ のとき $\max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta_i\} \rightarrow 0$ ならば、

$$RV^\Xi \rightarrow IV$$

となることが示される。したがって、日中に観測される収益率を用いることで日次収益率の2乗よりも精度の高いIVの推定量を計算することができる。

また、観測期間が一定のRVについても同様のことが示される。各区間の長さが $\Delta = 1/n$ とすべて等しく観測された n 個の日中収益率から計算されるRVを次のように表す。

$$RV^\Delta = \sum_{i=1}^n r_{i\Delta, \Delta}^2.$$

このとき先と同様に

$$RV^\Delta \rightarrow IV, \quad n \rightarrow \infty$$

となる。したがって、 RV^Δ は次のように分解できる。

$$RV^\Delta = IV + u. \quad (2)$$

ここで、 $u = RV^\Delta - IV$ は realized volatility error と呼ばれ、 $E(u|IV) = 0$ である。Barndorff-Nielsen/Shephard [2002]は realized volatility error が漸近的に次のような混合正規分布に従うことを示している。

$$\sqrt{n}(RV^\Delta - IV) \xrightarrow{d} N(0, 2IQ). \quad (3)$$

ここで、

$$IQ = \int_0^1 \sigma^4(s) ds$$

は Integrated Quarticity と呼ばれる。

2.2 Realized Range-Based Volatility

前節と同様の設定において、観測時間 t_{i-1} と t_i の日中レンジを次のように定義する。

$$s_{t_i, \Delta_i} = \sup_{t_{i-1} \leq u, v \leq t_i} \{p(u) - p(v)\}.$$

また、標準ブラウン運動 W ((1)式の B とは独立とする)の $[t_{i-1}, t_i]$ 上のレンジは

$$sW_{t_i, \Delta_i} = \sup_{t_{i-1} \leq u, v \leq t_i} \{W(u) - W(v)\}$$

となる。以下では、日次($t_i - t_{i-1} = 1$ のとき)の各レンジをそれぞれ s_p, s_W とする。

レンジについての研究は古くから行われており、レンジの分布についてはFeller [1951]が示している。また、Parkinson [1980]はFeller [1951]に基づいて、 $p(s) = \sigma W_t$ とした場合のレンジの積率母関数を導出しており、 r 次のモーメントについて、

$$E(s_{p_{t_i, \Delta_i}}^r) = \lambda_r \Delta_i^{r/2} \sigma^r, \quad r \geq 1$$

となることを示した。ここで、 $\lambda_r = E(s_W^r)$ で、 $\lambda_2 = 4 \log 2$ 、 $\lambda_4 = 9\zeta(3)$ である²。このとき $IV = \sigma^2$ であるから、 s_p^2/λ_2 はIVの不偏推定量となる。

² λ_r は次の式によって与えられる。

$$\lambda_r = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{4}{2^r}\right) 2^{r/2} \Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right) \zeta(r-1), \quad r \geq 1.$$

ここで、 $\gamma(x)$ と $\zeta(x)$ はそれぞれガンマ関数とRiemannのゼータ関数である。

前節と同様に $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ のような分割を考える. このとき観測時間 Ξ (観測頻度 n) での RRV は次のように定義される.

$$RRV^\Xi = \frac{1}{\lambda_2} \sum_{i=1}^n s_{p_{t_i}, \Delta_i}^2.$$

また, 観測期間が等しい ($\Delta = 1/n$) RRV を RRV^Δ と表す.

Christensen/Podolskij [2007] は対数価格がセミマルチンゲール ((1) 式を含むより一般的な過程) に従う場合に, RRV が IV の一致推定量, すなわち

$$RRV^\Delta \rightarrow IV, \quad n \rightarrow \infty$$

となることを示している. また, Christensen/Podolskij [2007] は次のような RRV の漸近分布も導出している.

$$\sqrt{n}(RRV^\Delta - IV) \xrightarrow{d} N(0, \Lambda IQ). \quad (4)$$

ここで,

$$\Lambda = \text{var}(RRV^\Delta) = \frac{\lambda_4 - \lambda_2^2}{\lambda_2^2} \approx 0.4$$

である. したがって, (3), (4) 式より, RRV の漸近分散は RV のその約 5 分の 1 となる. しかし, RRV の極限では $n \rightarrow \infty$ すなわち $\delta \rightarrow 0$ となっても t_{i-1} と t_i の間には十分な数のデータがあることが仮定されており, RV とはデータの使われ方が異なることに注意が必要である.

次に, 実際に観測された日中価格から RRV を計算する方法を述べる. 等間隔な n 個の区間 $[t_{i-1}, t_i]$ の中に, m 個の対数価格が等間隔に観測されていると仮定する. このとき日中レンジを

$$om_{p_i \Delta, \Delta} = \max_{0 \leq u, v \leq m} \{p_{(i-1)/n+v/mn} - p_{(i-1)/n+u/mn}\}$$

のように観測される最大値として求め, RRV を

$$RRV_m^\Delta = \frac{1}{\lambda_{2,m}} \sum_{i=1}^n om_{p_i \Delta, \Delta}^2$$

のように計算する. ここで, $\lambda_{r,m} = E(om_W^r)$,

$$om_W^r = \max_{0 \leq u, v \leq m} \{W_{v/m} - W_{u/m}\} \quad (5)$$

である. 有限標本では真の最大値と最小値が常に観測されるとは限らないので, 常に

$$RRV_m^\Delta \leq RRV^\Delta \quad (6)$$

となる. $\lambda_{r,m}$ は m について単調増加で $\lambda_{r,m} \rightarrow \lambda_r$ ($m \rightarrow \infty$) であるが, $\lambda_{r,m}$ を明示的に求めることはできない. Christensen/Podolskij [2007] はシミュレーションにより $\lambda_{2,m}$ を計算し, $\lambda_{2,m}$ のかわりに λ_2 を用いると, RRV を過小評価してしまうことを指摘している.

また, Christensen/Podolskij [2007] は同様のシミュレーションを行い, $RV^\Delta = RRV_1^\Delta$ と RRV_m^Δ の漸近分散を比較している. その結果, 例えば $m = 10$ のとき $\Lambda_m = (\lambda_{4,m} - \lambda_{2,m}^2) / \lambda_{2,m}^2 \approx 0.7$ となり, 漸近分散は RV の約 1/3 となる. つまり, 30 秒以下の間隔で価格が観測されるような流動性の高い資産ならば, 多くの実証分析で用いられている 5 分毎の収益率から計算した RV に比べて, より精度の高い IV の推定量を RRV を計算することにより得ることができる.

2.3 RV と RRV の計算上の問題点

RV と RRV はどちらも真のボラティリティ IV の一致推定量であるが、実際に観測される日中価格は限られており、 n は有限である。さらに、株式市場では日中に取引のされていない時間帯が存在する。特に、日本の株式市場の場合は、取引が終了する 15 時から取引が開始される翌日の 9 時までの夜間に加えて、11 時から 12 時半までの昼休みがあり、日中に取引のない時間帯が 2 つある。こうした長い時間間隔の収益率は通常の実時間よりもノイズを多く含んでいると考えられるので、RV や RRV の計算に昼休みや夜間の収益率を含めると IV の推定量としての精度が落ちてしまう。一方、単純に取引のある時間帯のみの日中収益率 (日中レンジ) を用いて RV (RRV) を計算しただけでは、IV を過小評価してしまう。

そこで、本稿では Hansen/Lunde [2005] の方法に従い RV 及び RRV を調整している³。日中収益率 (日中レンジ) のみから計算した第 t 日の RV (RRV) を RV_t^{intra} (RRV_t^{intra}) とする (以下では簡単化のため上付き文字の Ξ , Δ は省略する)。このとき Hansen/Lunde [2005] の方法に従って調整した RV 及び RRV は次のようになる。

$$RV_t^{HL} = \frac{\sum_{s=1}^T (R_s - \bar{R})^2}{\sum_{s=1}^T RV_s^{intra}} RV_t^{intra}, \quad RRV_t^{HL} = \frac{\sum_{s=1}^T (R_s - \bar{R})^2}{\sum_{s=1}^T RRV_s^{intra}} RRV_t^{intra}. \quad (7)$$

ここで、 R_t は第 t 日の日次収益率である。

2.4 RV と RRV の統計的性質

Andersen et al. [2001b] は為替レートの高頻度データから計算した RV の性質を分析し、次のような結果を得ている。

1. RV の対数値は正規分布に近いが、RV そのものはそうでない。
2. RV を用いて基準化した日次収益率は正規分布に近い。
3. RV とその対数値の自己相関は極めて高い。
4. 対数変換をすることで RV の自己相関は増加する。

これらの結果はその後の研究においても確認されており、例えば株式については Andersen et al. [2001a]、株価指数の先物については Martens [2002]、日本の株式については渡部/佐々木 [2006] を参照されたい。特に注目すべき特徴は、RV とその対数値の自己相関が非常に高いことである。この結果から、RV の定式化には次節で紹介するような長期依存性を適切に捉えられるモデルが用いられている。

また、対数変換によって自己相関が増加するという結果も興味深い。この結果は、非常に簡単な仮定の下で理論的にも説明することができる。 x と y が次のような 2 変量正規分布に従っていると仮定する。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \sim N(0, \Sigma), \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}.$$

ここで、 ρ は x と y の相関係数である。このとき、 e^x と e^y の相関係数は

$$\text{corr}(e^x, e^y) = \frac{e^\rho - 1}{e - 1}$$

となり、 $\rho \in (0, 1)$ について ρ よりも小さくなる。したがって、 ρ を RV の対数値の相関係数とすれば、RV を対数変換することで自己相関が増加するという結果と整合的であることがわかる。

Martens/Dijk [2007] は RRV についても RV と同様の性質が得られることを示している。また、Christensen/Podolskij [2007]、Martens/Dijk [2007]、吉田 [2007] は、実際に計算した RRV の標準偏差は RV のそれよりも小さく、RRV が IV のより効率的な推定量であるという結果を得ている。

³RRV の調整法について詳しくは Martens/Zein [2004] を参照されたい。

3 モデル

前節で述べたように, RV 及び RRV とそれらの対数値には長期依存性があり, この特性を説明するために長期記憶過程がしばしば用いられる. $\rho(h)$ を変数 X の h 次の自己相関関数とすると,

$$\sum_{h=0}^{\infty} |\rho(h)| < \infty$$

ならば X は短期記憶過程に従い,

$$\sum_{h=0}^{\infty} |\rho(h)| = \infty$$

ならば X は長期記憶過程に従う. 例えば定常な自己回帰移動平均 (Autoregressive Moving Average; ARMA) 過程は短期記憶過程である.

長期記憶過程の定式化に最も広く用いられているモデルとして自己回帰実数積分移動平均 (Autoregressive Fractionally Integrated Moving Average; ARFIMA) モデルがあり, Andersen et al. [2003], Giot/Laurent [2004], Martens/Zein [2004], Pong et al. [2004], Koopman et al. [2005] などが RV の定式化に用いている.

一方, Barndorff-Nielsen/Shephard [2002] はいくつかの短期記憶過程を混合することで RV の長期依存性を捉えるモデルを提案した. Barndorff-Nielsen/Shephard [2002] は, RV を (2) 式のように IV と攪乱項に分解し, ある仮定の下で IV が ARMA(1,1) 過程に従ういくつかの非観測要素の和となることを示している. このモデルは Unobserved Components (UC) モデルと呼ばれ, Koopman et al. [2005] により RV の定式化に用いられている.

以下ではこの 2 つのモデル及びその推定法について説明する.

3.1 ARFIMA モデル

L をラグ作用素とすると, ARFIMA(p, d, q) モデルは次のように表される.

$$\phi(L)(1-L)^d(X_t - \mu) = \theta(L)\epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim \text{i.i.d.} N(0, \sigma_\epsilon^2), \quad t = 1, \dots, T. \quad (8)$$

ここで, μ は X_t の無条件期待値で, $\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p$ と $\theta(z) = 1 + \theta_1 z + \dots + \theta_q z^q$ はすべての根を単位円外に持つ次数 p と q のラグ多項式である. また, d は実数差分パラメータ (fractional difference parameter) と呼ばれ, $d = 0$ ならば ARMA モデル, $d = 1$ ならば ARIMA モデルとなる. d は整数以外の値も取り, ARFIMA モデルは $0 < d < 0.5$ ならば定常な長期記憶過程に, $0.5 \leq d < 1$ ならば非定常な長期記憶過程になる.

ARFIMA モデルの推定には Beran [1995] の近似最尤法を用いる. 差分作用素 $(1-L)^d$ は

$$(1-L)^d = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d(d-1)\cdots(d-k+1)}{k!} (-L)^k$$

のように展開できるので, $(1-L)^d(X_t - \mu)$ を次のように近似する.

$$(1-L)^d(X_t - \mu) = (X_t - \mu) + \sum_{k < t} \frac{d(d-1)\cdots(d-k+1)}{k!} (X_{t-k} - \mu) \equiv \epsilon_t^*.$$

さらに, 求めた ϵ_t^* に $\theta(L)^{-1}\phi(L)$ を適用することにより, ϵ_t の推定値 $\hat{\epsilon}_t$ が得られる⁴. したがって, $\xi = (\mu, d, \phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q)'$ とすると, 近似対数尤度 l は

$$l(X_1, \dots, X_T | \xi, \sigma_\epsilon^2) = -\frac{T}{2} \log(2\pi\sigma_\epsilon^2) - \frac{1}{2\sigma_\epsilon^2} \sum_{t=1}^T \hat{\epsilon}_t^2 \quad (9)$$

⁴作用素 $(1-L)^d$ 及び $\theta(L)^{-1}\phi(L)$ は Doornik [2002] の ox に組み込まれている関数を用いて容易に計算できる.

となる。 $\sum_{t=1}^T \hat{\epsilon}_t^2$ は σ_ϵ^2 に依存しないため、はじめに $\sum_{t=1}^T \hat{\epsilon}_t^2$ を最小化し ξ の最尤推定量を求め、次に (9) 式対数尤度を最大化するような σ_ϵ^2 の推定量を求めればよい。その結果、 σ_ϵ^2 の最尤推定量は標本分散 $T^{-1} \sum_{t=1}^T \hat{\epsilon}_t^2$ となる。

3.2 Unobserved Components モデル

Barndorff-Nielsen/Shephard [2002] に従い、瞬時的ボラティリティ $\sigma^2(s)$ が次のような J 個の独立な要素の和として表されると仮定する。

$$\sigma^2(s) = \sum_{j=1}^J \tau_j^2(s). \quad (10)$$

このとき、 $\tau_j^2(s)$ の自己相関関数が $\exp(-\lambda_j|s|)$ であると仮定すると、2つの連続過程が考えられる。ひとつは CEV (Constant Elasticity of Variance) 過程で、次の確率微分方程式の解である (簡単化のため添え字 j を省略している)。

$$d\tau^2(s) = -\lambda\{\tau^2(s) - \mu\}ds + \omega\tau(s)^\eta db(\lambda s), \quad \eta \in [1, 2].$$

ここで、 $b(s)$ は (1) 式の $B(s)$ と無相関な標準ブラウン運動である。もうひとつは非ガウス OU (non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck) 過程で確率微分方程式

$$d\tau^2(s) = -\lambda\tau^2(s)ds + dz(\lambda s)$$

の解として表される。ここで、 $z(s)$ は非負の増分を持つ Lévy 過程である。

さらに、

$$E\{\tau_j^2(s)\} = w_j\mu, \quad \text{var}\{\tau_j^2(s)\} = w_j\omega^2, \quad \sum_{j=1}^J w_j = 1, \quad w_j \geq 0$$

と仮定すると、 $E\{\sigma^2(s)\} = \mu$, $\text{var}\{\sigma^2(s)\} = \omega^2$ であり、CEV 過程と OU 過程のどちらについても

$$\text{cov}\{\sigma^2(s), \sigma^2(s+l)\} = \sum_{j=1}^J \text{cov}\{\tau_j^2(s), \tau_j^2(s+l)\} = \omega^2 \sum_{j=1}^J w_j \exp(-\lambda_j|l|)$$

となる。すなわち、瞬時的ボラティリティ $\sigma^2(s)$ の自己相関関数は、独立な要素の様々な速度で減少する自己相関関数の和として表される。

(10) 式の OU 過程または CEV 過程の和は線形で各要素は独立であるため、IV は

$$IV_t = \sum_{j=1}^J \tau_{j,t}^2, \quad \tau_{j,t}^2 = \int_t^{t+1} \tau_j^2(s)ds \quad (11)$$

のように書くことができ、各 $\tau_{j,t}^2$ ($j = 1, \dots, J$) について

$$\begin{aligned} \text{var}(\tau_{j,t}^2) &= 2w_j\omega^2\lambda_j^{-2}\{\exp(-\lambda_j) - 1 + \lambda_j\}, \\ \text{corr}\{\tau_{j,t}^2, \tau_{j,t+s}^2\} &= \delta \exp\{-\lambda(s-1)\}, \quad s = 1, 2, \dots, \\ \delta &= \frac{\{1 - \exp(-\lambda_j)\}^2}{2\{\exp(-\lambda_j) - 1 + \lambda_j\}} \end{aligned} \quad (12)$$

となる。この結果は、 $\tau_{j,t}^2$ それぞれについて次のような ARMA(1,1) 表現ができることを意味する。

$$\tau_{j,t+1}^2 = w_j\mu + \phi_j(\tau_{j,t}^2 - w_j\mu) + v_{j,t} + \theta_j v_{j,t-1}, \quad v_{j,t} \sim \text{WN}(0, \sigma_{v_j}^2). \quad (13)$$

ただし,

$$\phi_j = e^{-\lambda_j}, \quad \theta_j = \frac{1 - \sqrt{1 - 4(\rho_1^{(j)})^2}}{2\rho_1^{(j)}}, \quad \rho_1^{(j)} = \frac{\text{corr}\{\tau_{j,t}^2, \tau_{j,t+1}^2\} - \phi_j}{(1 + \phi_j^2) - 2\phi_j \text{corr}\{\tau_{j,t}^2, \tau_{j,t+1}^2\}}, \quad (14)$$

$$\sigma_{v_j}^2 = \frac{(1 + \phi_j^2)\text{var}\{\tau_{j,t}^2\} - 2\phi_j \text{corr}\{\tau_{j,t}^2, \tau_{j,t+1}^2\}\text{var}\{\tau_{j,t}^2\}}{1 + \theta_j^2} \quad (15)$$

である(詳しくは Meddahi [2003] を参照されたい). このとき ϕ と θ との対応関係及び ϕ と (12) 式の δ との対応関係は図 1 に描かれている通りであるが, 図より, Barndorff-Nielsen/Shephard [2002] や Meddahi [2003] で指摘されているように, ϕ の広い範囲について θ はおおよそ 0.26 となっていることがわかる.

[図 1]

(2), (11), (13) 式より, 次のような非観測要素が J 個の UC(J) モデルが得られる.

$$\begin{aligned} RV_t &= IV_t + u_t, \quad u_t \sim \text{WN}(0, \sigma_u^2), \\ IV_t &= \sum_{j=1}^J \tau_{j,t}^2, \\ \tau_{j,t+1}^2 &= w_j \mu + \phi_j(\tau_{j,t}^2 - w_j \mu) + v_{j,t} + \theta_j v_{j,t-1}, \quad v_{j,t} \sim \text{WN}(0, \sigma_{v_j}^2). \end{aligned}$$

ここで, Barndorff-Nielsen/Shephard [2002] より

$$\sigma_u^2 = 2n \left[(\mu n^{-1})^2 + 2\omega^2 \sum_{j=1}^J \frac{w_j}{\lambda_j^2} \{ \exp(-\lambda_j n^{-1}) - 1 + \lambda_j n^{-1} \} \right] \quad (16)$$

である. また, UC(J) モデルは

$$\alpha_t = \begin{pmatrix} \alpha_{1,t} \\ \vdots \\ \alpha_{J,t} \end{pmatrix}, \quad \alpha_{1,t} = \begin{pmatrix} \tau_{1,t}^2 - \mu \\ \theta_1 v_{1,t-1} \end{pmatrix}, \quad \alpha_{j,t} = \begin{pmatrix} \tau_{j,t}^2 \\ \theta_j v_{j,t-1} \end{pmatrix}, \quad j = 2, \dots, J$$

とすることで, 線形状態空間表現が可能となる. 例えば UC(2) モデルを線形状態空間モデルで表現すると次のようになる.

$$RV_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \alpha_t + u_t, \quad (17)$$

$$\alpha_{t+1} = \begin{pmatrix} (1 - \phi_1)\mu \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \alpha_t + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \theta_1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & \theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1,t} \\ v_{2,t} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

したがって, カルマン・フィルターを用いて α_t の最良線形不偏推定量を計算することができるので, パラメータ $(\mu, \lambda_1, \dots, \lambda_J, w_1, \dots, w_J, \omega^2)$ は疑似最尤推定法によって求められる(実際には $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_J$ という識別条件を課して推定する). つまり, 離散観測された日中収益率から計算した RV を用いて, 連続過程のパラメータを推定することが可能となる.

4 実証分析

4.1 データ

本稿では, 日経 NEEDS-MT データベースから得られた東京証券取引所の東証株価指数 (TOPIX) 現物の高頻度データを用いて分析を行う. 標本期間は 1994 年 4 月 1 日から 2005 年 3 月 30 日までの 2215 日間である. データには 1 分毎の価格が記録されているが, 市場のマイクロストラクチャー・ノイズ⁵の影

⁵市場のマイクロストラクチャー・ノイズとその RV への影響について詳しくは Ait-Sahalia/Mykland/Zhang [2005] 及び Hansen/Lunde [2006] を参照されたい.

響を考慮し、RV の計算の際には 5 分毎の収益率を用いた⁶。同様に、5 分間隔の日中レンジを用いて RRV を計算している。東京証券取引所の営業時間は前場が 9:00-11:00、後場が 12:30-15:00 であるから、日中の 5 分毎の収益率及びレンジは合計で 52 個 ($n = 52$) となる (夜間と昼休みの収益率及びレンジは含まれないことに注意されたい)。 (7) 式を用いて RV と RRV を計算すると次のようになる。

$$RV_t^{HL} = \frac{\sum_{s=1}^T (R_s - \bar{R})^2}{\sum_{s=1}^T RV_s^{intra}} RV_t^{intra} = 2.7388 \times RV_t^{intra},$$

$$RRV_t^{HL} = \frac{\sum_{s=1}^T (R_t - \bar{R})^2}{\sum_{s=1}^T RRV_s^{intra}} RRV_t^{intra} = 5.9900 \times RRV_t^{intra}.$$

TOPIX 現物の 5 分毎の日中収益率と日中レンジを用いて Hansen/Lunde [2006] の方法に従って計算した RV 及び RRV と日次収益率及び日次レンジの 2 乗が図 2, 3 に描かれている。ただし、日次レンジの 2 乗は IV の不偏推定量となるように $4 \log 2$ で割って調整している。図 2 より、RV と日次収益率の 2 乗は同じように変動するが、 n が増えることによってその変動幅が減少し、分散が小さくなっていることがわかる。この事実は Andersen/Bollerslev [1998] によって初めて実証され、その後の数多くの研究で同様の結果が得られている。また、図 3 より、RRV と日次レンジの 2 乗についても同様の結果が示された。

[図 2, 3]

表 1 には RV や RRV などについての基本統計量が記されている。LB(10) は Diebold [1988] に従って分散不均一性を修正した Ljung-Box (LB) 統計量である。上段は、日次収益率 (R_t) と日次レンジ (S_t) 及びそれらの 2 乗 ($R_t^2, S_t^2/(4 \log 2)$) の基本統計量である。LB 統計量より日次レンジ、日次収益率の 2 乗、日次レンジの 2 乗の自己相関が強いという結果が得られた。

中段は日中の収益率とレンジのみから計算した RV (RV_t^{intra}) と RRV (RRV_t^{intra}) 及びそれらを Hansen/Lunde [2005] の方法で調整した RV_t^{HL} と RRV_t^{HL} の基本統計量である。表より、RRV は RV よりも大きな下方バイアスを持つが、RRV の標準偏差は RV のそれよりも小さく、Hansen/Lunde [2005] の調整により、IV の有効な推定量となることが示された。また、LB 統計量から RV と RRV のどちらも高い自己相関を持つこと、RRV の長期依存性は RV よりも強いという結果が得られた。

下段は RV_t^{HL} と RRV_t^{HL} の対数値と、それらを用いて基準化した日次収益率の基本統計量である。表より、RV と RRV の対数値は正規分布に近いということ、対数変換によって自己相関が強くなることが示された。また、RV と RRV を用いて基準化した日次収益率はどちらも正規分布に近いという結果が得られた。

[表 1]

以上の結果から、第 2 節で述べた 1-4 の性質が TOPIX 現物の RV と RRV どちらについても当てはまることが示された。特に注目すべき特徴は、RV と RRV 及びそれらの対数値の自己相関が非常に高いことであり、それらの自己相関関数を描いた図 4 から RV と RRV 及びそれらの対数値の自己相関が非常にゆっくりと減少することがわかる。

[図 4]

4.2 最尤法によるモデル分析

4.2.1 モデルのパラメータ推定

本稿では、RV と RRV 及びそれらの対数値に (8) 式の ARFIMA モデルを適用した (それぞれ RV-ARFIMA モデル, RRV-ARFIMA モデル, logRV-ARFIMA モデル, logRRV-ARFIMA モデルと呼ぶこ

⁶Takahashi/Omori/Watanabe [2007] は同じデータを用いて 5 分毎の収益率から計算した RV について、マイクロストラクチャー・ノイズの影響は無視できるほど小さいという結果を得ている。また、渡部 [2007] も日経平均株価について同様の結果を得ている。

ととする). 表 2 は, 全期間 (1995 年 4 月 1 日から 2005 年 3 月 30 日) の RV と RRV 及びそれらの対数値を用いた ARFIMA(1, d , 1) モデルの推定結果である (その他の p, q の組み合わせの ARFIMA(p, d, q) モデルも推定したが, 煩雑になるためその結果は省略する). 括弧内の値は標準誤差であり, 実数差分パラメータ d はすべてのモデルで有意に 0 より大きい. また, RRV-ARFIMA モデルの d の値が RV-ARFIMA モデルのそれよりも大きいという結果は, RV よりも RRV の長期依存性が強いという事実と整合的である. logRRV-ARFIMA と logRV-ARFIMA についても同様の結果が得られた. さらに, RV と RRV そのものを定式化したモデルよりもそれらの対数値を定式化したモデルの d が大きいという結果は, 対数変換によって自己相関が強くなることと整合的である. 注目すべきは多くのモデルについて $d > 0.5$ あるいは $d = 0.5$ という仮説が有意水準 5% で棄却できないことである. 特に, RV と RRV の対数値については d の推定値が 0.5 よりも大きなモデルが多く, logRV-ARFIMA(0, d , 0) モデルと logRRV-ARFIMA(0, d , 0) モデル以外は $d > 0.5$ あるいは $d = 0.5$ という仮説を棄却できないという結果が得られた. 以上より, RV と RRV 及びそれらの対数値が非定常な長期記憶過程に従っている可能性を否定できないことが示された.

[表 2]

ARFIMA モデルと同様に, RV と RRV 及びそれらの対数値を UC モデルに適用した (それぞれ RV-UC モデル, RRV-UC モデル, logRV-UC モデル, logRRV-UC モデルと呼ぶこととする). RRV の分散は RV の分散とは異なるため, 本稿では RRV の分散 σ_u^2 を未知パラメータとして直接推定する方法と, (16) 式を用いる方法のどちらも行った.

Barndorff-Nielsen/Shephard [2002] と Koopman et al. [2005] は 3 次以上の UC モデルを推定し, 3 次以降の ARMA 項の推定値が有意とならないという結果を得ており, 渡部 [2007] は情報量基準による最適なモデルは UC(2) モデルであることを示している. そこで本稿では, UC(1), UC(2) モデルを推定し, 表 3 には, それらのうち UC(2) モデルの推定結果を示した. RRV' は σ_u^2 を未知パラメータとして直接推定したモデルである. 括弧内は標準誤差で, パラメータはすべて有意である (0.000 はその値が 0.0005 よりも小さいことを意味する). また, RV よりも RRV の自己相関が強いという事実を反映し, RV-UC モデルよりも RRV-UC モデルの ϕ の値が大きくなっている. さらに, RRV の分散 σ_u^2 を未知パラメータとして推定した場合, (16) 式を用いて推定した場合と比べて, 特に σ_u^2 と ϕ の値がより大きく推定されており, (16) 式では RRV の分散を適切に捉えられないことが示唆されている. RV と RRV の対数値についても同様の結果が得られた.

[表 3]

図 5 には, 上段に RV と推定した UC モデルの自己相関関数が, 下段に RV の対数値と推定した UC モデルの自己相関関数が描かれている. 図より, 非観測要素をひとつ追加することによって, RV とその対数値の低次の自己相関がよく近似できるようになっていることが示された (RRV についても同様の結果が得られたが, 図は省略する).

[図 5]

4.2.2 モデル比較

まず, モデルのデータへの当てはまりを Akaike [1973] の情報量基準 (Akaike Information Criterion; AIC) と Schwartz [1978] のベイズ情報量基準 (Schwartz's Bayes Information Criterion; SBIC) を用いて比較した. AIC では RV-UC(2) モデル, RRV-ARFIMA(0, d , 2) モデル, logRV-ARFIMA(1, d , 2) モデル, logRRV-ARFIMA(1, d , 2) が選ばれ, SBIC では RV-ARFIMA(1, d , 0) モデル, RRV-ARFIMA(0, d , 1) モデル, logRV(0, d , 1) モデル, logRRV(0, d , 1) モデルが選ばれた. また, σ_u^2 を未知パラメータとして推定した RRV-UC' モデルが RRV-UC モデルよりも優れており, (16) 式では RRV の分散を適切に捉えられないことが示された. 以上の結果より RV と RRV 及びそれらの対数値の定式化には ARFIMA モデルが適しているという結果が得られた.

また、2つのモデルのボラティリティの予測力を比較するために、真のボラティリティの代理変数と予測値との乖離の程度を表す損失関数と Mincer/Zarnowitz [1969] の回帰 (MZ 回帰) を用いた。真のボラティリティの代理変数には RV と RRV の両方を用いて分析を行っている。損失関数は、平均 2 乗誤差の平方根 (Root Mean Squared Error; RMSE), 平均絶対誤差 (Mean Absolute Error; MAE), 平均 2 乗誤差率の平方根 (Root Mean Squared Percentage Error; RMSPE), 平均絶対誤差率 (Mean Absolute Percentage Error; MAPE) の 4 つである。RV または RRV あるいはそれらの対数値を y_t , y_t の 1 期先予測値を $\hat{y}_{t|t-1}$ ($\hat{y}_{1|0} \equiv y_1$) とし、予測期間を $t = h, \dots, H$ とすると、4 つの損失関数は次のように表される。

$$\begin{aligned} \text{RMSE} &= \sqrt{\frac{1}{H-h+1} \sum_{t=h}^H (y_t - \hat{y}_{t|t-1})^2}, \\ \text{MAE} &= \frac{1}{H-h+1} \sum_{t=h}^H |y_t - \hat{y}_{t|t-1}|, \\ \text{RMSPE} &= \sqrt{\frac{1}{H-h+1} \sum_{t=h}^H \left(1 - \frac{\hat{y}_{t|t-1}}{y_t}\right)^2}, \\ \text{MAPE} &= \frac{1}{H-h+1} \sum_{t=h}^H \left|1 - \frac{\hat{y}_{t|t-1}}{y_t}\right|. \end{aligned}$$

一方、MZ 回帰は

$$y_t = a + b\hat{y}_{t|t-1} + e_t, \quad e_t \sim N(0, \sigma_e^2)$$

のように表され、決定係数 (R^2) を用いて予測の精度を測る⁷。

標本内予測では、まず全標本を用いてモデルのパラメータを推定し、その推定値を用いて各期の 1 期先予測値を計算する。表 4, 5, 6, 7 は ARFIMA モデルと UC モデルの標本内予測についての結果であり、ARFIMA モデル内の差はわずかであるが、UC モデルは要素数を 1 から 2 に増加することにより標本内予測のパフォーマンスが改善されることが示されている。表 8 には、ARFIMA モデルと UC モデルの標本内予測について各指標で最も優れていたモデルを記しており、全体的には ARFIMA モデルの標本内予測力が UC モデルよりも高いという結果が得られた。また、RRV-UC' モデルは標本内予測についても RRV-UC モデルを優越することが示された。さらに、ボラティリティの代理変数を RV (の対数値) とした場合に、RRV (の対数値) を用いたモデルのボラティリティ予測が優れている場合が多く、RRV を用いたモデルの標本内予測力が高いということが示された。

[表 4, 5, 6, 7, 8]

加えて、2つのモデルの標本外予測についても同様の比較を行った。本稿では、Rolling window 推定と呼ばれる手法を用いて 1 期先予測値を計算している。まず、1996 年 4 月 1 日から 2002 年 5 月 2 日までの 1500 個のデータ (RV または RRV あるいはそれらの対数値) を用いて各モデルのパラメータを推定し、その推定値に基づいて 1 期先予測値を計算する。次に、標本期間を 1 期先にずらして 1996 年 4 月 2 日から 2002 年 5 月 7 日までのデータを用いてパラメータを推定し 1 期先予測値を求める。これを順次繰り返し、最終的には 2002 年 5 月 7 日から 2005 年 3 月 30 日までの 715 個の 1 期先予測値を計算した。表 9, 10, 11, 12 は、ARFIMA モデルと UC モデルの標本外予測の結果であり、標本内予測と同様に ARFIMA モデル内の差はわずかであるが、UC モデルは要素数を 1 から 2 に増加することにより標本外予測のパフォーマンスが改善されることが示されている。また、RRV-UC モデルよりも RRV-UC' モデルのパフォーマンスが高いことも示された。表 13 に、ARFIMA モデルと UC モデルの標本外予測について、各指標で最も優れていたモデルを記した。表より、標本内予測と同様に ARFIMA モデルの標本外予測力の方が高いとい

⁷ Andersen/Bollerslev/Meddahi [2005] は被説明変数として真のボラティリティでなく代理変数 (RV, RRV) を用いることにより、決定係数が過小評価されることを示しており、ある定数をかけることにより修正する方法を提案している。しかし、この修正はモデル間の比較には影響しないため、本稿では修正しない決定係数を用いている。

う結果が得られた。さらに、ボラティリティの代理変数を RRV (の対数値) とした場合に、RV (の対数値) を用いたモデルのボラティリティ予測が優れている場合が多いことから、標本内予測とは逆に、RV を用いたモデルの標本外予測力が高いということが示された。

[表 9, 10, 11, 12, 13]

4.3 ベイズ分析

本節では、独立 Metropolis-Hastings (MH) アルゴリズムを用いてマルコフ連鎖モンテカルロ (Markov Chain Monte Carlo; MCMC) 法によるベイズ推定を行い、ARFIMA モデルと UC モデルを分析する⁸。所与のデータを $Y = (y_1, \dots, y_T)$ 、パラメータを ϑ として、事前分布を $\pi(\vartheta)$ とすると、事後対数密度は

$$\log g(\vartheta|Y) = \text{const.} + l(Y|\vartheta) + \log \pi(\vartheta)$$

となる。ここで、 $l(Y|\vartheta)$ は対数尤度であり、ARFIMA モデルの近似対数尤度は (9) 式で与えられ、UC モデルの対数尤度はカルマン・フィルターにより計算できる。提案分布には、事後分布のモードの近似値を $\hat{\vartheta}$ として正規分布 $N(m, V)$ を用いる。ただし、

$$m = \hat{\vartheta} + V \left. \frac{\partial \log g(\vartheta|Y)}{\partial \vartheta} \right|_{\vartheta=\hat{\vartheta}}, \quad V = \left\{ - \left. \frac{\partial^2 \log g(\vartheta|Y)}{\partial \vartheta \partial \vartheta'} \right\}_{\vartheta=\hat{\vartheta}}^{-1}$$

である。

独立 MH アルゴリズムによる ARFIMA モデルの MCMC 推定において、最初の 1000 回は捨て、その後の 5000 回のサンプリングを用いて d が 0.5 以上となる事後確率を計算した結果を表 14 に記した (パラメータの事後平均や標準偏差は最尤推定量とほぼ等しいため省略した)。表より、RV と RRV の対数値については ARFIMA(0, d , 0) モデル以外は $P(d \geq 0.5)$ が非常に大きく、RV と RRV の対数値が非定常な長期記憶過程に従っている可能性が高いという結果が得られた。さらに、RV (の対数値) と RRV (の対数値) では、RRV (の対数値) の方が非定常な長期記憶過程に従っている可能性が高いことが示された。

[表 14]

また、周辺尤度と Spiegelhalter et al. [2002] の情報量基準 (Deviance Information Criterion; DIC) を用いたモデル比較も行った。周辺尤度は

$$m(Y) = \int f(Y|\vartheta)\pi(\vartheta)d\vartheta = \frac{f(Y|\vartheta)\pi(\vartheta)}{f(\vartheta|Y)}$$

のように定義される。ここで、 $f(Y|\vartheta)$ は尤度関数、 $\pi(\vartheta)$ は ϑ の事前分布である。本稿では Chib [1995] に従い、事後平均 ϑ^* の下での対数周辺尤度

$$\log \hat{m}(Y) = \log f(Y|\vartheta^*) + \log \pi(\vartheta^*) - \log \pi(\vartheta^*|Y)$$

を推定する。事前分布 $\pi(\vartheta)$ は任意に定めることができ、ARFIMA モデルと UC モデルについて対数尤度 $\log f(Y|\vartheta)$ は既知であるため、事後密度 $\pi(\vartheta^*|Y)$ がわかれば周辺尤度を求めることができる (MH アルゴリズムを用いた MCMC 法の事後密度の計算については Chib/Jeliazkov [2001] を参照されたい)。

一方、DIC はディービアンズ (deviance) 統計量

$$D(\vartheta) = -2 \log f(Y|\vartheta) + 2 \log c(Y)$$

に基づいて、

$$DIC = 2\bar{D} - D(\hat{\vartheta})$$

⁸MH アルゴリズムについて詳しくは Chib/Greenberg [1995] や大森/和合 [2005] を参照されたい。

として定義される。ここで、 $c(Y)$ はデータ Y のみに依存する基準化関数である。また、 $\bar{D} = E_{\vartheta|Y}(D)$ で、MCMC 法によってサンプリングした $\vartheta_1, \dots, \vartheta_{5000}$ を用いて $N^{-1} \sum_{i=1}^{5000} D(\vartheta_i)$ のように推定する。 $\bar{\vartheta}$ は ϑ の事後平均である。AIC, SBIC と同様に、DIC の値が低いほどモデルの当てはまりはよいと考えられる。

表 15, 16 は各モデルの対数周辺尤度と DIC を計算した結果である。表より、ARFIMA モデルの間では差異は小さいが、UC モデルは要素数を 1 から 2 に増加することによりパフォーマンスが改善されることが示された。表 17 には、ARFIMA モデルと UC モデルの対数周辺尤度と DIC を比較し、最も優れていたモデルを記した。表より、RV-UC(2) モデルが対数周辺尤度と DIC について優れている以外は、RRV 及び RV と RRV の対数値すべてにおいて ARFIMA モデルのパフォーマンスがよいという結果が得られた。したがって、全体的には ARFIMA モデルが優れているということが示された。

[表 15, 16, 17]

さらに、最尤法による分析と同様に Rolling window 法による 1 期先予測も行った。ただし、ベイズ分析では MH アルゴリズムによりパラメータを発生させる度に 1 期先の予測値を発生させ、その事後平均を予測値とした。表 18, 19, 20, 21 は各モデルの標本外予測の結果であり、各指標で最もパフォーマンスのよいモデルが表 22 に記されている。表より、最尤法の標本外予測と同様に、全体的に RV を用いた ARFIMA モデルの予測パフォーマンスが優れているという結果が得られた。

[表 18, 19, 20, 21, 22]

5 結論

本稿では、TOPIX の高頻度データから計算した RV を用いて、RV の定式化によく用いられる ARFIMA モデルと、これまで実証分析ではあまり用いられていない UC モデルの推定及び比較を行った。また、最近提案され、実証研究があまりなされていない RRV についても同様に分析した。2 つのモデルのデータへの当てはまりを AIC, SBIC を用いて比較した結果、ARFIMA モデルが優れていることが示された。また、RV と RRV を真のボラティリティの代理変数として、2 つのモデルの標本内と標本外の予測力を RMSE, MAE, RMSPE, MAE 及び MZ 回帰によって比較した結果、モデルの当てはまりと同様に、ARFIMA モデルの予測力が高いことが示された。特に、標本内予測については RRV を用いた ARFIMA モデルの、標本外予測については RV を用いた ARFIMA モデルのボラティリティ予測力が高いことが示された。したがって、RV と RRV およびそれらの対数値の定式化においては、ARFIMA モデルが優れているという結果が得られた。UC モデルよりも ARFIMA モデルのボラティリティ予測力が高いという結果は、Koopman et al. [2005] と一致している。Koopman et al. [2005] は真のボラティリティの代理変数を RV としているが、本稿ではそれに RRV を用いた場合も同様の結果が得られることを示している。

さらに、ARFIMA モデルと UC モデルのベイズ推定も行った。独立 MH アルゴリズムを用いた MCMC 推定の結果、事後平均は最尤推定量と概ね一致した。また、事後分布から ARFIMA モデルの実数差分パラメータ d を分析した結果、特に RV と RRV の対数値については非定常な長期記憶過程に従っている可能性が高いことが示された。加えて、モデルのデータへの適合度を周辺尤度と DIC を用いて比較し、標本外の予測力を MZ 回帰, RMSE, MAE, RMSPE, MAE によって評価し、全体的に ARFIMA モデルが優れているという結果を得た。これらの結果から、ベイズ分析による比較においても ARFIMA モデルが UC モデルよりも優れているということが示された。

参考文献

大森裕浩, 和合肇 [2005] 「マルコフ連鎖モンテカル口法とその応用」, 和合肇 (編) 『ベイズ計量経済分析』, 東洋経済新報社, 29-99.

- 吉田多尉介 [2007] 「日経平均株価における Realized Range-Based Volatility と Realized Volatility の予測力の比較分析」一橋大学大学院経済学研究科修士論文.
- 渡部敏明 [2000] 『ボラティリティ変動モデル』, 朝倉書店 .
- 渡部敏明, 佐々木浩二 [2006] 「ARCH型モデルと Realized Volatility によるボラティリティ予測と Value-at-Risk」, 『金融研究』 25(2) , 39–74 .
- 渡部敏明 [2007] 「Realized Volatility -サーベイと日本の株式市場への応用-」, 『経済研究』 58(4) , 352–373 .
- Aït-Sahalia, Y., P. A. Mykland, and L. Zhang [2005] “How Often to Sample a Continuous-Time Process in the Presence of Market Microstructure Noise,” *Review of Financial Studies* 18, 351–416.
- Akaike, H. [1973] “Information Theory and an Extension of the Maximum Likelihood Principle,” in B. N. Petrov and F. Csáki eds. *Second International Symposium on Information Theory*, 267–281.
- Andersen, T. G., T. Bollerslev, F. X. Diebold, and H. Ebens [2001a] “The Distribution of Realized Stock Return Volatility,” *Journal of Financial Economics* 61, 43–76.
- Andersen, T. G., T. Bollerslev, F. X. Diebold, and P. Labys [2001b] “The Distribution of Realized Exchange Rate Volatility,” *Journal of the American Statistical Association* 96, 42–55.
- [2003] “Modeling and Forecasting Realized Volatility,” *Econometrica* 71, 579–625.
- Andersen, T. G., T. Bollerslev, and N. Meddahi [2005] “Correcting the Errors: Volatility Forecast Evaluation Using High-Frequency Data and Realized Volatilities,” *Econometrica* 73, 279–296.
- Andersen, T. G. and T. Bollerslev [1998] “Answering the Skeptics: Yes, Standard Volatility Models Do Provide Accurate Forecasts,” *International Economic Review* 39, 885–905.
- Barndorff-Nielsen, O. E. and N. Shephard [2001] “Non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck-Based Models and Some of Their Uses in Financial Economics,” *Journal of the Royal Statistical Society B* 63, 167–241.
- [2002] “Econometric Analysis of Realized Volatility and Its Use in Estimating Stochastic Volatility Models,” *Journal of the Royal Statistical Society B* 64, 253–280.
- Beran, J. [1995] “Maximum Likelihood Estimation of the Differencing Parameter for Invertible Short and Long Memory Autoregressive Integrated Moving Average Models,” *Journal of the Royal Statistical Society B* 57, 659–672.
- Bollerslev, T. [1986] “Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity,” *Journal of Econometrics* 31, 307–327.
- Bollerslev, T., R. F. Engle, and D. B. Nelson [1994] “ARCH Models,” in R. F. Engle and D. L. McFadden eds. *The Handbook of Econometrics* 4, Amsterdam: North-Holland, 2959–3038.
- Chib, S. [1995] “Marginal Likelihood from the Gibbs Output,” *Journal of the American Statistical Association* 90, 1313–1321.
- Chib, S. and E. Greenberg [1995] “Understanding the Metropolis-Hastings Algorithm,” *American Statistician* 49, 327–335.
- Chib, S. and I. Jeliazkov [2001] “Marginal Likelihood from the Metropolis-Hastings Output,” *Journal of the American Statistical Association* 96, 270–281.

- Christensen, K. and M. Podolskij [2007] “Realized Range-Based Estimation of Integrated Variance.” *Journal of Econometrics*, 141, 323–349.
- Diebold, F. X. [1988] *Empirical Modeling of Exchange Rate Dynamics*, New York: Springer-Verlag.
- Doornik, J. A. [2002] *Object-Oriented Matrix Programming Using Ox, 3rd ed*, London: Timberlake Consultants Press and Oxford.
- Engle, R. F. [1982] “Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation,” *Econometrica* 50, 987–1007.
- Feller, W. [1951] “The Asymptotic Distribution of the Range of Sums of Independent Random Variables,” *Annals of Mathematical Statistics* 22, 427–432.
- Giot, P. and S. Laurent [2004] “Modeling Daily Value-at-Risk Using Realized Volatility and ARCH Type Models,” *Journal of Empirical Finance* 11, 379–398.
- Hansen, P. R. and A. Lunde [2005] “A Forecast Comparison of Volatility Models: Does Anything Beat a GARCH(1,1)?” *Journal of Applied Econometrics* 20, 873–889.
- [2006] “Realized Variance and Market Microstructure Noise,” *Journal of Business & Economic Statistics* 24, 127–161.
- Harvey, A., E. Ruiz, and N. Shephard [1994] “Multivariate Stochastic Variance Models,” *Review of Economic Studies* 61, 247–264.
- Koopman, S. J., B. Jungbacker, and E. Hol [2005] “Forecasting Daily Variability of the S&P 100 Stock Index Using Historical, Realised and Implied Volatility Measurements,” *Journal of Empirical Finance* 12, 445–475.
- Martens, M. [2002] “Measuring and Forecasting S&P 500 Index-Futures Volatility Using High-Frequency Data,” *The Journal of Futures Markets* 22, 497–518.
- Martens, M. and D. van Dijk [2007] “Measuring Volatility with the Realized Range,” *Journal of Econometrics* 138, 181–207.
- Martens, M. and J. Zein [2004] “Predicting Financial Volatility: High-Frequency Time-Series Forecasts vis-à-vis Implied Volatility,” *The Journal of Futures Markets* 24, 1005–1028.
- Meddahi, N. [2003] “ARMA Representation of Integrated and Realized Variances,” *Econometrics Journal* 6, 335–356.
- Mincer, J. and V. Zarnowitz [1969] “The Evaluation of Economic Forecasts,” in J. Mincer ed. *Economic Forecasts and Expectations: Analyses of Forecasting Behavior and Performance*, New York: National Bureau of Economic Research.
- Parkinson, M. [1980] “The Extreme Value Method for Estimating the Variance of the Rate of Return,” *The Journal of Business* 53, 61–65.
- Pong, S., M. B. Shackleton, S. J. Taylor, and X. Xu [2004] “Forecasting Currency Volatility: A Comparison of Implied Volatilities and AR(FI)MA Models,” *Journal of Banking & Finance* 28, 2541–2563.
- Schwartz, G. [1978] “Estimating the Dimension of a Model,” *American Statistician* 6, 461–464.

- Shephard, N. [1996] “Statistical Aspects of ARCH and Stochastic Volatility,” in D. R. Cox, D. V. Hinkley, and O. E. Barndorff-Nielsen eds. *Time Series Models in Econometrics, Finance and Other Fields*, New York: Chapman & Hall, 1–67.
- Spiegelhalter, D. J., N. G. Best, B. P. Carlin, and A. van der Linde [2002] “Bayesian Measures of Model Complexity and Fit (with Discussion),” *Journal of the Royal Statistical Society B* 64, 583–639.
- Takahashi, M., Y. Omori, and T. Watanabe [2007] “Estimating Stochastic Volatility Models Using Daily Returns and Realized Volatility Simultaneously.” CIRJE Discussion Paper, Faculty of Economics, University of Tokyo
(<http://www.e.u-tokyo.ac.jp/cirje/research/dp/2007/2007cf515.pdf>).
- Taylor, S. J. [1986] *Modeling Financial Time Series*: John Wiley & Sons.

	R_t	S_t	R_t^2	$S_t^2/(4 \log 2)$
平均	-0.0153	1.3332	1.6243	0.8355
標準偏差	1.2744	0.7342	3.2104	1.2484
歪度	-0.1074	2.2116	5.9990	7.9597
尖度	4.9020	12.9721	57.8924	122.6594
最大値	6.5993	8.7855	43.5513	27.8386
最小値	-6.5736	0.2623	0.0000	0.0248
LB(10)	20.37	1064.90	100.80	340.76
	RV_t^{intra}	RRV_t^{intra}	RV_t^{HL}	RRV_t^{HL}
平均	0.5930	0.2711	1.6240	1.6240
標準偏差	0.5174	0.2135	1.4170	1.2789
歪度	4.2527	3.6193	4.2527	3.6193
尖度	38.1751	29.1972	38.1751	29.1972
最大値	7.6003	2.9436	20.8159	17.6321
最小値	0.0452	0.0281	0.1239	0.1686
LB(10)	1083.38	1366.59	1083.38	1366.59
	$\log(RV_t^{HL})$	$\log(RRV_t^{HL})$	$R_t/\sqrt{RV_t^{HL}}$	$R_t/\sqrt{RRV_t^{HL}}$
平均	0.2263	0.2600	0.0017	-0.0018
標準偏差	0.7161	0.6675	0.9533	0.9387
歪度	-0.0286	0.0025	0.0773	0.0512
尖度	3.2784	3.1576	2.5087	2.5031
最大値	3.0357	2.8697	3.0602	2.7841
最小値	-2.0883	-1.7803	-2.5776	-2.5502
LB(10)	3729.49	4359.52	34.09	34.01

表 1: 基本統計量. 上段: 日次収益率 (R_t) と日次レンジ (S_t) 及びそれらの 2 乗 (R_t^2 , $S_t^2/(4 \log 2)$). 中段: 日中の収益率とレンジのみから計算した RV (RV_t^{intra}) と RRV (RRV_t^{intra}) 及びそれらを Hansen/Lunde [2005] の方法で調整した RV_t^{HL} と RRV_t^{HL} . 下段: Hansen/Lunde [2005] の方法で調整した RV と RRV の対数値及び RV と RRV を用いて基準化した日次収益率. LB(10) は Diebold [1988] に従って分散不均一性を修正した Ljung-Box 統計量で, その臨界値は有意水準 10%, 5%, 1% でそれぞれ 15.99, 18.31, 23.21 である.

	RV		RRV		log(RV)		log(RRV)	
μ	1.212	(0.470)	1.148	(0.458)	-0.341	(0.356)	-0.376	(0.363)
d	0.450	(0.050)	0.468	(0.043)	0.556	(0.055)	0.578	(0.056)
ϕ_1	0.210	(0.145)	0.147	(0.149)	0.236	(0.112)	0.272	(0.101)
θ_1	-0.344	(0.167)	-0.289	(0.171)	-0.447	(0.143)	-0.484	(0.130)
σ_ϵ^2	1.335	(0.040)	1.013	(0.030)	0.247	(0.007)	0.196	(0.006)
L	-3462		-3157		-1596		-1337	

表 2: 全期間 (1995 年 4 月 1 日から 2005 年 3 月 30 日) の RV と RRV 及びそれらの対数値を用いた ARFIMA(1, d , 1) モデルの (近似) 最尤推定の結果. 括弧内は標準誤差, L は対数尤度を表す.

	RV		RRV		RRV'	
μ	1.613	(0.126)	1.613	(0.123)	1.605	(0.065)
σ_u^2	0.200	(0.015)	0.178	(0.015)	0.595	(0.065)
ϕ_1	0.948	(0.015)	0.951	(0.011)	0.964	(0.011)
ϕ_2	0.164	(0.043)	0.168	(0.047)	0.605	(0.144)
θ_1	0.268	(0.000)	0.268	(0.000)	0.268	(0.000)
θ_2	0.226	(0.010)	0.227	(0.011)	0.264	(0.004)
$\sigma_{v_1}^2$	0.059	(0.014)	0.050	(0.011)	0.032	(0.011)
$\sigma_{v_2}^2$	0.876	(0.049)	0.624	(0.038)	0.209	(0.069)
L	-3462		-3157		-3156	

表 3: 全期間 (1995 年 4 月 1 日から 2005 年 3 月 30 日) の RV と RRV を用いた UC(2) モデルの (擬似) 最尤推定の結果. RRV' は σ_u^2 を未知パラメータとして直接推定したモデルである. 括弧内は標準誤差で, 0.000 はその値が 0.0005 より小さいことを表し, L は対数尤度である.

	R^2		RMSE		MAE	
	RV	RRV	RV	RRV	RV	RRV
RV-ARFIMA						
(0, d , 0)	0.3328	0.3701	1.1576	1.0156	0.6502	0.5869
(0, d , 1)	0.3351	0.3733	1.1556	1.0138	0.6485	0.5861
(0, d , 2)	0.3359	0.3742	1.1550	1.0135	0.6473	0.5852
(1, d , 0)	0.3347	0.3728	1.1559	1.0140	0.6491	0.5865
(1, d , 1)	0.3356	0.3739	1.1552	1.0136	0.6480	0.5858
(1, d , 2)	0.3359	0.3743	1.1550	1.0134	0.6472	0.5852
(2, d , 0)	0.3360	0.3743	1.1548	1.0133	0.6478	0.5860
(2, d , 1)	0.3360	0.3743	1.1548	1.0133	0.6478	0.5860
(2, d , 2)	0.3361	0.3742	1.1548	1.0132	0.6480	0.5860
(3, d , 0)	0.3360	0.3743	1.1548	1.0132	0.6478	0.5860
(4, d , 0)	0.3361	0.3743	1.1547	1.0131	0.6485	0.5867
(5, d , 0)	0.3367	0.3749	1.1543	1.0130	0.6486	0.5865
RV-UC(1)	0.2213	0.2380	1.2506	1.1173	0.7457	0.6865
RV-UC(2)	0.3373	0.3809	1.1541	1.0063	0.6498	0.5848
RRV-ARFIMA						
(0, d , 0)	0.3317	0.3779	1.1592	1.0089	0.6499	0.5805
(0, d , 1)	0.3339	0.3809	1.1567	1.0064	0.6476	0.5789
(0, d , 2)	0.3342	0.3813	1.1564	1.0062	0.6468	0.5783
(1, d , 0)	0.3336	0.3805	1.1570	1.0067	0.6480	0.5791
(1, d , 1)	0.3341	0.3812	1.1564	1.0063	0.6470	0.5784
(1, d , 2)	0.3343	0.3814	1.1563	1.0061	0.6465	0.5780
(2, d , 0)	0.3344	0.3815	1.1562	1.0060	0.6470	0.5785
(2, d , 1)	0.3344	0.3815	1.1562	1.0060	0.6470	0.5785
(2, d , 2)	0.3345	0.3815	1.1562	1.0060	0.6472	0.5787
(3, d , 0)	0.3344	0.3814	1.1562	1.0060	0.6472	0.5787
(4, d , 0)	0.3346	0.3816	1.1561	1.0059	0.6480	0.5794
(5, d , 0)	0.3353	0.3822	1.1554	1.0054	0.6477	0.5793
RRV-UC(1)	0.2367	0.2606	1.2387	1.1002	0.7378	0.6735
RRV-UC(1)'	0.3346	0.3777	1.1564	1.0089	0.6550	0.5903
RRV-UC(2)	0.3373	0.3809	1.1541	1.0063	0.6498	0.5848
RRV-UC(2)'	0.3378	0.3818	1.1536	1.0056	0.6495	0.5837

表 4: RV と RRV を用いた ARFIMA モデルと UC モデルの標本内予測の結果. R^2 は MZ 回帰の決定係数, RMSE は平均 2 乗誤差の平方根, MAE は平均絶対誤差を表し, ボラティリティの代理変数を RV と RRV とした場合のそれぞれについて計算している.

	RMSPE		MAPE	
	RV	RRV	RV	RRV
RV-ARFIMA				
(0, d , 0)	0.7506	0.6190	0.5084	0.4288
(0, d , 1)	0.7345	0.6066	0.4974	0.4202
(0, d , 2)	0.7283	0.6023	0.4933	0.4169
(1, d , 0)	0.7385	0.6096	0.5001	0.4224
(1, d , 1)	0.7307	0.6042	0.4948	0.4182
(1, d , 2)	0.7284	0.6024	0.4935	0.4171
(2, d , 0)	0.7315	0.6053	0.4954	0.4191
(2, d , 1)	0.7320	0.6056	0.4957	0.4194
(2, d , 2)	0.7334	0.6067	0.4968	0.4202
(3, d , 0)	0.7325	0.6060	0.4961	0.4197
(4, d , 0)	0.7357	0.6091	0.4983	0.4218
(5, d , 0)	0.7321	0.6066	0.4954	0.4192
RV-UC(1)	1.1125	0.9246	0.6952	0.5988
RV-UC(2)	0.7707	0.6370	0.5198	0.4419
RRV-ARFIMA				
(0, d , 0)	0.4761	0.4622	0.4139	0.4122
(0, d , 1)	0.7266	0.5858	0.4977	0.4139
(0, d , 2)	0.7228	0.5831	0.4954	0.4120
(1, d , 0)	0.7299	0.5883	0.4998	0.4156
(1, d , 1)	0.7237	0.5838	0.4959	0.4124
(1, d , 2)	0.7221	0.5825	0.4949	0.4116
(2, d , 0)	0.7245	0.5848	0.4965	0.4131
(2, d , 1)	0.7248	0.5850	0.4967	0.4132
(2, d , 2)	0.7263	0.5862	0.4978	0.4142
(3, d , 0)	0.7258	0.5858	0.4973	0.4138
(4, d , 0)	0.7290	0.5889	0.4997	0.4159
(5, d , 0)	0.7258	0.5866	0.4968	0.4134
RRV-UC(1)	1.0815	0.8920	0.6823	0.5840
RRV-UC(1)'	0.7761	0.6285	0.5267	0.4425
RRV-UC(2)	0.7609	0.6157	0.5178	0.4340
RRV-UC(2)'	0.7549	0.6107	0.5144	0.4307

表 5: RV と RRV を用いた ARFIMA モデルと UC モデルの標本内予測の結果. RMSPE は平均 2 乗誤差率の平方根, MAE は平均絶対誤差率を表し, ボラティリティの代理変数を RV と RRV とした場合のそれぞれについて計算している.

	R^2		RMSE		MAE	
	log RV	log RRV	log RV	log RRV	log RV	log RRV
logRV-ARFIMA						
(0, d , 0)	0.5135	0.5480	0.4997	0.4506	0.3835	0.3424
(0, d , 1)	0.5172	0.5513	0.4976	0.4492	0.3820	0.3413
(0, d , 2)	0.5177	0.5519	0.4973	0.4491	0.3816	0.3413
(1, d , 0)	0.5168	0.5512	0.4978	0.4494	0.3820	0.3411
(1, d , 1)	0.5179	0.5523	0.4973	0.4491	0.3813	0.3409
(1, d , 2)	0.5190	0.5531	0.4967	0.4488	0.3806	0.3406
(2, d , 0)	0.5179	0.5520	0.4973	0.4490	0.3814	0.3411
(2, d , 1)	0.5187	0.5524	0.4968	0.4485	0.3811	0.3408
(2, d , 2)	0.5191	0.5530	0.4966	0.4486	0.3806	0.3407
(3, d , 0)	0.5180	0.5521	0.4972	0.4491	0.3812	0.3410
(4, d , 0)	0.5193	0.5532	0.4965	0.4485	0.3805	0.3405
(5, d , 0)	0.5197	0.5537	0.4964	0.4484	0.3803	0.3404
logRV-UC(1)	0.3631	0.3813	0.5716	0.5259	0.4440	0.4087
logRV-UC(2)	0.5174	0.5481	0.4974	0.4505	0.3826	0.3434
logRRV-ARFIMA						
(0, d , 0)	0.5096	0.5567	0.5028	0.4446	0.3888	0.3392
(0, d , 1)	0.5130	0.5597	0.5007	0.4429	0.3868	0.3378
(0, d , 2)	0.5135	0.5602	0.5004	0.4427	0.3863	0.3373
(1, d , 0)	0.5125	0.5595	0.5009	0.4431	0.3868	0.3378
(1, d , 1)	0.5136	0.5606	0.5002	0.4426	0.3858	0.3365
(1, d , 2)	0.5145	0.5612	0.4998	0.4423	0.3855	0.3367
(2, d , 0)	0.5135	0.5603	0.5004	0.4427	0.3861	0.3371
(2, d , 1)	0.5143	0.5609	0.5001	0.4424	0.3861	0.3372
(2, d , 2)	0.5147	0.5614	0.4997	0.4422	0.3853	0.3362
(3, d , 0)	0.5136	0.5604	0.5003	0.4426	0.3859	0.3369
(4, d , 0)	0.5150	0.5617	0.4996	0.4420	0.3853	0.3362
(5, d , 0)	0.5154	0.5621	0.4994	0.4418	0.3848	0.3357
logRRV-UC(1)	0.3832	0.4115	0.5645	0.5122	0.4398	0.3980
logRRV-UC(1)'	0.5128	0.5546	0.5012	0.4455	0.3884	0.3415
logRRV-UC(2)	0.5167	0.5601	0.4992	0.4427	0.3857	0.3378
logRRV-UC(2)'	0.5171	0.5609	0.4989	0.4423	0.3855	0.3374

表 6: RV と RRV の対数値を用いた ARFIMA モデルと UC モデルの標本内予測の結果. R^2 は MZ 回帰の決定係数, RMSE は平均 2 乗誤差の平方根, MAE は平均絶対誤差を表し, ボラティリティの対数値の代理変数を RV と RRV の対数値とした場合のそれぞれについて計算している.

	RMSPE		MAPE	
	log RV	log RRV	log RV	log RRV
logRV-ARFIMA				
(0, d , 0)	15.9944	44.4268	2.2821	3.2368
(0, d , 1)	21.1803	47.3647	2.5298	3.3201
(0, d , 2)	20.5799	46.5497	2.5205	3.2968
(1, d , 0)	20.5992	47.5051	2.4917	3.3217
(1, d , 1)	20.7421	46.8054	2.5233	3.3046
(1, d , 2)	19.7614	47.2850	2.4828	3.2854
(2, d , 0)	20.1859	46.7003	2.5046	3.2915
(2, d , 1)	19.6923	46.2422	2.4748	3.2662
(2, d , 2)	19.6491	46.5091	2.4846	3.2764
(3, d , 0)	19.9638	46.8641	2.4950	3.2867
(4, d , 0)	19.8548	45.6375	2.4948	3.2643
(5, d , 0)	19.6589	46.3766	2.4968	3.2872
logRV-UC(1)	22.5034	20.3971	2.6096	2.7342
logRV-UC(2)	18.9609	41.4211	2.4494	3.1662
logRRV-ARFIMA				
(0, d , 0)	13.3150	45.9979	2.2607	3.3324
(0, d , 1)	16.4613	48.8703	2.4451	3.4196
(0, d , 2)	16.2577	47.9550	2.4500	3.3880
(1, d , 0)	16.0658	49.0975	2.4129	3.4237
(1, d , 1)	16.2569	48.1303	2.4516	3.3929
(1, d , 2)	15.9593	48.2653	2.4172	3.3733
(2, d , 0)	16.1947	48.3117	2.4336	3.3890
(2, d , 1)	15.8630	47.8202	2.4083	3.3678
(2, d , 2)	15.7161	47.7111	2.4234	3.3655
(3, d , 0)	16.2051	48.4323	2.4311	3.3853
(4, d , 0)	16.4558	47.0112	2.4483	3.3646
(5, d , 0)	16.6359	47.6901	2.4610	3.3818
logRRV-UC(1)	20.4303	21.4461	2.6033	2.8249
logRRV-UC(1)'	19.1536	45.9191	2.5614	3.3541
logRRV-UC(2)	15.4650	42.8529	2.3941	3.2570
logRRV-UC(2)'	15.9390	44.2527	2.4132	3.2947

表 7: RV と RRV の対数値を用いた ARFIMA モデルと UC モデルの標本内予測の結果. RMSPE は平均 2 乗誤差率の平方根, MAE は平均絶対誤差率を表し, ボラティリティの対数値の代理変数を RV と RRV の対数値とした場合のそれぞれについて計算している.

	RV	RRV
R^2	RRV-UC(2)'	RRV-UC(2)'
RMSE	RRV-UC(2)'	RRV-ARFIMA(5, d , 0)
MAE	RRV-ARFIMA(1, d , 2)	RRV-ARFIMA(0, d , 2)
RMSPE	RRV-ARFIMA(0, d , 0)	RRV-ARFIMA(0, d , 0)
MAPE	RRV-ARFIMA(0, d , 0)	RRV-ARFIMA(1, d , 2)
	log(RV)	log(RRV)
R^2	logRV-ARFIMA(5, d , 0)	logRRV-ARFIMA(5, d , 0)
RMSE	logRV-ARFIMA(5, d , 0)	logRRV-ARFIMA(5, d , 0)
MAE	logRV-ARFIMA(5, d , 0)	logRRV-ARFIMA(5, d , 0)
RMSPE	logRRV-ARFIMA(0, d , 0)	logRV-UC(1)
MAPE	logRRV-ARFIMA(0, d , 0)	logRV-UC(1)

表 8: RV と RRV 及びそれらの対数値を用いた ARFIMA モデルと UC モデルの標本内予測の比較結果. 表には RV と RRV 及びそれらの対数値をボラティリティの代理変数とした場合に最もパフォーマンスのよいモデルを記している.

	R^2		RMSE		MAE	
	RV	RRV	RV	RRV	RV	RRV
RV-ARFIMA						
(0, d , 0)	0.4437	0.4961	0.7606	0.6795	0.4863	0.4333
(0, d , 1)	0.4349	0.4879	0.7650	0.6838	0.4859	0.4328
(0, d , 2)	0.4388	0.4926	0.7605	0.6800	0.4755	0.4234
(1, d , 0)	0.4356	0.4885	0.7648	0.6836	0.4867	0.4334
(1, d , 1)	0.4358	0.4892	0.7634	0.6825	0.4808	0.4281
(1, d , 2)	0.4358	0.4860	0.7702	0.6885	0.5050	0.4529
(2, d , 0)	0.4399	0.4937	0.7599	0.6792	0.4756	0.4233
(2, d , 1)	0.4333	0.4855	0.7708	0.6882	0.5055	0.4507
(2, d , 2)	0.4337	0.4831	0.7722	0.6908	0.5085	0.4556
(3, d , 0)	0.4393	0.4931	0.7605	0.6797	0.4767	0.4244
(4, d , 0)	0.4376	0.4909	0.7626	0.6815	0.4819	0.4293
(5, d , 0)	0.4341	0.4878	0.7640	0.6831	0.4800	0.4273
RV-UC(1)	0.3777	0.4098	0.8654	0.7864	0.6505	0.5989
RV-UC(2)	0.4292	0.4805	0.7763	0.6934	0.5134	0.4606
RRV-ARFIMA						
(0, d , 0)	0.4386	0.4935	0.7685	0.6836	0.5032	0.4449
(0, d , 1)	0.4305	0.4861	0.7718	0.6867	0.5000	0.4417
(0, d , 2)	0.4324	0.4884	0.7686	0.6840	0.4921	0.4346
(1, d , 0)	0.4307	0.4862	0.7722	0.6871	0.5018	0.4432
(1, d , 1)	0.4314	0.4874	0.7696	0.6849	0.4941	0.4360
(1, d , 2)	0.4333	0.4878	0.7745	0.6890	0.5121	0.4539
(2, d , 0)	0.4333	0.4894	0.7684	0.6835	0.4928	0.4347
(2, d , 1)	0.4321	0.4866	0.7753	0.6898	0.5127	0.4548
(2, d , 2)	0.4298	0.4836	0.7747	0.6904	0.5088	0.4524
(3, d , 0)	0.4327	0.4886	0.7689	0.6841	0.4935	0.4353
(4, d , 0)	0.4306	0.4862	0.7716	0.6865	0.4991	0.4405
(5, d , 0)	0.4267	0.4826	0.7729	0.6880	0.4973	0.4389
RRV-UC(1)	0.4128	0.4616	0.7805	0.7013	0.5031	0.4497
RRV-UC(1)'	0.4264	0.4804	0.7822	0.6964	0.5239	0.4669
RRV-UC(2)	0.4326	0.4870	0.7757	0.6902	0.5142	0.4566
RRV-UC(2)'	0.4318	0.4854	0.7789	0.6933	0.5228	0.4648

表 9: RV と RRV を用いた ARFIMA モデルと UC モデルの標本外予測の結果. R^2 は MZ 回帰の決定係数, RMSE は平均 2 乗誤差の平方根, MAE は平均絶対誤差を表し, ボラティリティの代理変数を RV と RRV とした場合のそれぞれについて計算している.

	RMSPE		MAPE	
	RV	RRV	RV	RRV
RV-ARFIMA				
(0, d , 0)	0.6974	0.4953	0.4846	0.3647
(0, d , 1)	0.6846	0.4869	0.4770	0.3591
(0, d , 2)	0.6371	0.4546	0.4461	0.3350
(1, d , 0)	0.6896	0.4901	0.4800	0.3613
(1, d , 1)	0.6596	0.4701	0.4600	0.3460
(1, d , 2)	0.7621	0.5494	0.5282	0.4020
(2, d , 0)	0.6394	0.4563	0.4475	0.3359
(2, d , 1)	0.7756	0.5557	0.5320	0.5320
(2, d , 2)	0.7755	0.5591	0.5354	0.4074
(3, d , 0)	0.6444	0.4596	0.4507	0.3385
(4, d , 0)	0.6665	0.4750	0.4655	0.3500
(5, d , 0)	0.6527	0.4660	0.4563	0.3428
RV-UC(1)	1.4052	1.0588	0.8778	0.6971
RV-UC(2)	0.8148	0.5859	0.5556	0.4241
RRV-ARFIMA				
(0, d , 0)	0.7443	0.5288	0.5165	0.3879
(0, d , 1)	0.7221	0.5133	0.5029	0.3773
(0, d , 2)	0.6870	0.4887	0.4801	0.3596
(1, d , 0)	0.7306	0.5192	0.5082	0.3813
(1, d , 1)	0.6927	0.4923	0.4846	0.3629
(1, d , 2)	0.7790	0.5581	0.5389	0.4074
(2, d , 0)	0.6910	0.4914	0.4827	0.3613
(2, d , 1)	0.7837	0.5618	0.5415	0.4096
(2, d , 2)	0.7747	0.5539	0.5339	0.4038
(3, d , 0)	0.6925	0.4926	0.4838	0.3621
(4, d , 0)	0.7141	0.5082	0.4982	0.3735
(5, d , 0)	0.7006	0.4989	0.4891	0.3664
RRV-UC(1)	0.6815	0.4891	0.4751	0.3593
RRV-UC(1)'	0.8402	0.6039	0.5738	0.4369
RRV-UC(2)	0.8008	0.5729	0.5501	0.4165
RRV-UC(2)'	0.8400	0.6031	0.5728	0.4354

表 10: RV と RRV を用いた ARFIMA モデルと UC モデルの標本外予測の結果. RMSPE は平均 2 乗誤差率の平方根, MAE は平均絶対誤差率を表し, ボラティリティの代理変数を RV と RRV とした場合のそれぞれについて計算している.

	R^2		RMSE		MAE	
	log RV	log RRV	log RV	log RRV	log RV	log RRV
logRV-ARFIMA						
(0, d , 0)	0.6477	0.6848	0.4307	0.3703	0.3343	0.2853
(0, d , 1)	0.6474	0.6848	0.4286	0.3712	0.3322	0.2854
(0, d , 2)	0.6484	0.6859	0.4273	0.3712	0.3308	0.2851
(1, d , 0)	0.6472	0.6846	0.4292	0.3709	0.3328	0.2853
(1, d , 1)	0.6478	0.6854	0.4278	0.3713	0.3314	0.2853
(1, d , 2)	0.6466	0.6828	0.4298	0.3718	0.3347	0.2882
(2, d , 0)	0.6485	0.6859	0.4275	0.3709	0.3312	0.2848
(2, d , 1)	0.6471	0.6836	0.4296	0.3711	0.3346	0.2875
(2, d , 2)	0.6477	0.6837	0.4286	0.3715	0.3339	0.2885
(3, d , 0)	0.6480	0.6854	0.4281	0.3708	0.3318	0.2848
(4, d , 0)	0.6479	0.6856	0.4279	0.3710	0.3315	0.2848
(5, d , 0)	0.6441	0.6823	0.4296	0.3736	0.3336	0.2873
logRV-UC(1)	0.5402	0.5660	0.5343	0.4571	0.4181	0.3611
logRV-UC(2)	0.6420	0.6774	0.4350	0.3741	0.3402	0.2912
logRRV-ARFIMA						
(0, d , 0)	0.6415	0.6818	0.4483	0.3743	0.3524	0.2919
(0, d , 1)	0.6410	0.6815	0.4452	0.3729	0.3494	0.2902
(0, d , 2)	0.6419	0.6825	0.4431	0.3717	0.3470	0.2885
(1, d , 0)	0.6408	0.6814	0.4463	0.3734	0.3504	0.2909
(1, d , 1)	0.6412	0.6818	0.4437	0.3721	0.3478	0.2890
(1, d , 2)	0.6420	0.6821	0.4450	0.3727	0.3491	0.2905
(2, d , 0)	0.6419	0.6825	0.4440	0.3720	0.3479	0.2891
(2, d , 1)	0.6418	0.6819	0.4459	0.3730	0.3502	0.2910
(2, d , 2)	0.6409	0.6810	0.4465	0.3736	0.3509	0.2917
(3, d , 0)	0.6418	0.6824	0.4445	0.3722	0.3484	0.2895
(4, d , 0)	0.6421	0.6828	0.4438	0.3718	0.3475	0.2888
(5, d , 0)	0.6386	0.6798	0.4444	0.3731	0.3476	0.2889
logRRV-UC(1)	0.6195	0.6555	0.4505	0.3860	0.3553	0.3030
logRRV-UC(1)'	0.6366	0.6754	0.4527	0.3787	0.3571	0.2977
logRRV-UC(2)	0.6366	0.6754	0.4527	0.3787	0.3571	0.2977
logRRV-UC(2)'	0.6398	0.6797	0.4478	0.3748	0.3520	0.2923

表 11: RV と RRV の対数値を用いた ARFIMA モデルと UC モデルの標本外予測の結果. R^2 は MZ 回帰の決定係数, RMSE は平均 2 乗誤差の平方根, MAE は平均絶対誤差を表し, ボラティリティの対数値の代理変数を RV と RRV の対数値とした場合のそれぞれについて計算している.

	RMSPE		MAPE	
	log RV	log RRV	log RV	log RRV
logRV-ARFIMA				
(0, d , 0)	9.4487	10.6812	1.8661	2.1226
(0, d , 1)	16.8382	11.1747	2.1625	2.1539
(0, d , 2)	16.8655	10.7356	2.1675	2.1055
(1, d , 0)	15.9173	11.3006	2.1245	2.1642
(1, d , 1)	16.8319	11.7410	2.1691	2.1924
(1, d , 2)	16.9831	11.6385	2.2021	2.1878
(2, d , 0)	16.7105	10.7276	2.1632	2.1078
(2, d , 1)	16.2800	12.1716	2.1855	2.2318
(2, d , 2)	15.6111	11.6780	2.1434	2.1783
(3, d , 0)	15.7443	10.4795	2.1335	2.1008
(4, d , 0)	15.5116	10.7817	2.1182	2.1178
(5, d , 0)	18.8251	10.4035	2.2488	2.0677
logRV-UC(1)	41.4496	9.5081	3.3126	2.2742
logRV-UC(2)	20.2706	12.6695	2.3613	2.3120
logRRV-ARFIMA				
(0, d , 0)	5.9676	12.7353	1.8348	2.2878
(0, d , 1)	9.1852	13.0170	2.0049	2.3080
(0, d , 2)	9.4519	12.1977	2.0171	2.2444
(1, d , 0)	8.6625	13.1910	1.9813	2.3216
(1, d , 1)	9.3759	13.5635	2.0189	2.3416
(1, d , 2)	10.2373	12.8904	2.0513	2.2929
(2, d , 0)	9.3176	12.2413	2.0119	2.2514
(2, d , 1)	8.5653	13.6246	2.0005	2.3584
(2, d , 2)	8.8845	13.1596	2.0090	2.3152
(3, d , 0)	9.0806	12.0995	2.0053	2.2482
(4, d , 0)	9.0840	12.4070	2.0013	2.2707
(5, d , 0)	11.6294	11.9339	2.1073	2.2144
logRRV-UC(1)	31.2923	15.2681	3.1026	2.7312
logRRV-UC(1)'	11.3853	14.4928	2.1502	2.4689
logRRV-UC(2)	11.3853	14.4928	2.1502	2.4689
logRRV-UC(2)'	8.9563	13.4853	2.0083	2.3387

表 12: RV と RRV の対数値を用いた ARFIMA モデルと UC モデルの標本外予測の結果. RMSPE は平均 2 乗誤差率の平方根, MAE は平均絶対誤差率を表し, ボラティリティの対数値の代理変数を RV と RRV の対数値とした場合のそれぞれについて計算している.

	RV	RRV
R^2	RV-ARFIMA(0, d , 0)	RV-ARFIMA(0, d , 0)
RMSE	RV-ARFIMA(2, d , 0)	RV-ARFIMA(2, d , 0)
MAE	RV-ARFIMA(0, d , 2)	RV-ARFIMA(2, d , 0)
RMSPE	RV-ARFIMA(0, d , 2)	RV-ARFIMA(0, d , 2)
MAPE	RV-ARFIMA(0, d , 2)	RV-ARFIMA(0, d , 2)
	log(RV)	log(RRV)
R^2	logRV-ARFIMA(2, d , 0)	logRV-ARFIMA(0, d , 2), (2, d , 0)
RMSE	logRRV-ARFIMA(0, d , 2)	logRV-ARFIMA(0, d , 0)
MAE	logRRV-ARFIMA(0, d , 2)	logRV-ARFIMA(0, d , 2)
RMSPE	logRRV-ARFIMA(0, d , 0)	logRV-UC(1)
MAPE	logRRV-ARFIMA(0, d , 0)	logRV-ARFIMA(5, d , 0)

表 13: RV と RRV 及びそれらの対数値を用いた ARFIMA モデルと UC モデルの標本外予測の比較結果. 表には RV と RRV 及びそれらの対数値をボラティリティの代理変数とした場合に最もパフォーマンスのよいモデルを記している.

ARFIMA(p, d, q)	RV	RRV	log(RV)	log(RRV)
(0, d , 0)	0.00	0.00	0.00	0.00
(0, d , 1)	0.02	0.07	0.57	0.69
(0, d , 2)	0.19	0.30	0.87	0.92
(1, d , 0)	0.00	0.00	0.15	0.33
(1, d , 1)	0.19	0.28	0.90	0.96
(1, d , 2)	0.13	0.23	0.77	0.88
(2, d , 0)	0.06	0.18	0.73	0.83
(2, d , 1)	0.09	0.19	0.44	0.63
(2, d , 2)	0.08	0.13	0.82	0.93
(3, d , 0)	0.08	0.19	0.65	0.78
(4, d , 0)	0.09	0.15	0.90	0.97
(5, d , 0)	0.30	0.45	0.96	0.99

表 14: ARFIMA(p, d, q) モデルの d が 0.5 以上となる事後確率.

	対数周辺尤度		DIC
RV-ARFIMA			
(0, d , 0)	-1443.9111	(0.0067)	6940.1057
(0, d , 1)	-1443.6961	(0.0064)	6934.5621
(0, d , 2)	-1447.1519	(0.0089)	6934.2916
(1, d , 0)	-1444.4869	(0.0063)	6935.4596
(1, d , 1)	-1445.5212	(0.0097)	6934.5557
(1, d , 2)	-1449.1233	(0.0122)	6935.0506
(2, d , 0)	-1446.9181	(0.0087)	6933.5783
(2, d , 1)	-1449.0150	(0.0121)	6933.9677
(2, d , 2)	-1450.5000	(0.0112)	6935.5590
(3, d , 0)	-1451.4319	(0.0106)	6935.3963
(4, d , 0)	-1455.3710	(0.0073)	6937.3261
(5, d , 0)	-1458.9408	(0.0495)	6937.3602
RV-UC(1)	-1615.9957	(0.0066)	7282.6652
RV-UC(2)	-1443.1794	(0.0094)	6933.5585
RRV-ARFIMA			
(0, d , 0)	-1139.3915	(0.0067)	6330.9742
(0, d , 1)	-1137.6092	(0.0064)	6322.3965
(0, d , 2)	-1141.6309	(0.0089)	6323.1100
(1, d , 0)	-1139.0716	(0.0112)	6323.4259
(1, d , 1)	-1140.0896	(0.0118)	6323.2226
(1, d , 2)	-1144.2955	(0.0170)	6323.2480
(2, d , 0)	-1141.6817	(0.0111)	6322.5296
(2, d , 1)	-1144.2528	(0.0172)	6322.8170
(2, d , 2)	-1146.7524	(0.0214)	6323.7526
(3, d , 0)	-1146.7864	(0.0160)	6324.4055
(4, d , 0)	-1151.4624	(0.0189)	6325.8567
(5, d , 0)	-1153.6746	(0.1348)	6325.6841
RRV-UC(1)	-1332.1406	(0.0047)	6715.4798
RRV-UC(1)'	-1141.3409	(0.0065)	6333.8698
RRV-UC(2)	-1138.9969	(0.0115)	6324.8026
RRV-UC(2)'	-1138.2365	(0.0112)	6322.6327

表 15: RV と RRV を用いた ARFIMA モデルと UC モデルのベイズ推定による比較結果. 周辺尤度の対数值 (括弧内は標準誤差) は独立 MH 連鎖から Chib/Jeliazkov [2001] の方法を用いて計算した. また, DIC は Spiegelhalter et al. [2002] による情報量基準である.

	対数周辺尤度		DIC
logRV-ARFIMA			
(0, d , 0)	416.2916	(0.0067)	3218.4972
(0, d , 1)	422.0647	(0.0063)	3202.0613
(0, d , 2)	418.7624	(0.0089)	3201.7318
(1, d , 0)	420.3388	(0.0098)	3204.0578
(1, d , 1)	420.9275	(0.0098)	3200.4125
(1, d , 2)	416.9815	(0.0161)	3196.7281
(2, d , 0)	418.9394	(0.0086)	3200.8254
(2, d , 1)	416.4407	(0.0158)	3197.4679
(2, d , 2)	415.0072	(0.0206)	3197.4589
(3, d , 0)	414.1281	(0.0137)	3202.1986
(4, d , 0)	412.5393	(0.0152)	3198.3480
(5, d , 0)	409.5132	(0.0890)	3198.7378
logRV-UC(1)	117.2765	(0.0087)	3814.2115
logRV-UC(2)	421.5742	(0.0090)	3203.1655
logRRV-ARFIMA			
(0, d , 0)	675.0108	(0.0067)	2701.0075
(0, d , 1)	679.7750	(0.0063)	2686.4795
(0, d , 2)	676.5353	(0.0089)	2686.0100
(1, d , 0)	679.0098	(0.0017)	2687.8601
(1, d , 1)	678.7322	(0.0127)	2683.8582
(1, d , 2)	675.5639	(0.0070)	2682.0342
(2, d , 0)	676.1475	(0.0117)	2685.5619
(2, d , 1)	674.8561	(0.0067)	2683.3464
(2, d , 2)	672.8757	(0.0182)	2682.8153
(3, d , 0)	672.5346	(0.0039)	2687.3285
(4, d , 0)	670.6558	(0.0129)	2682.6330
(5, d , 0)	666.9064	(0.0745)	2682.8979
logRRV-UC(1)	359.7320	(0.0103)	3328.6418
logRRV-UC(1)'	668.2593	(0.0114)	2712.4978
logRRV-UC(2)	679.3706	(0.0122)	2686.8287
logRRV-UC(2)'	679.2252	(0.0169)	2684.5465

表 16: RV と RRV の対数値を用いた ARFIMA モデルと UC モデルのベイズ推定による比較結果. 周辺尤度の対数値 (括弧内は標準誤差) は独立 MH 連鎖から Chib/Jeliazkov [2001] の方法を用いて計算した. また, DIC は Spiegelhalter et al. [2002] による情報量基準である.

	RV	RRV	log(RV)	log(RRV)
周辺尤度	UC(2)	ARFIMA(0, d , 1)	ARFIMA(0, d , 1)	ARFIMA(0, d , 1)
DIC	UC(2)	ARFIMA(0, d , 1)	ARFIMA(1, d , 2)	ARFIMA(1, d , 2)

表 17: RV と RRV 及びその対数値を用いた ARFIMA モデルと UC モデルのベイズ推定による比較結果. 周辺尤度 (の対数値) は独立 MH 連鎖から Chib/Jeliazkov [2001] の方法を用いて計算した. また, DIC は Spiegelhalter et al. [2002] による情報量基準である.

	R^2		RMSE		MAE	
	RV	RRV	RV	RRV	RV	RRV
RV-ARFIMA						
(0, d , 0)	0.4196	0.4691	0.7753	0.6959	0.5024	0.4526
(0, d , 1)	0.4287	0.4800	0.7685	0.6885	0.4880	0.4356
(0, d , 2)	0.4319	0.4854	0.7649	0.6846	0.4801	0.4286
(1, d , 0)	0.4293	0.4805	0.7685	0.6884	0.4895	0.4366
(1, d , 1)	0.4301	0.4816	0.7666	0.6871	0.4869	0.4354
(1, d , 2)	0.4297	0.4853	0.7660	0.6847	0.4765	0.4259
(2, d , 0)	0.4202	0.4728	0.7729	0.6930	0.4880	0.4361
(2, d , 1)	0.4313	0.4846	0.7654	0.6852	0.4794	0.4294
(2, d , 2)	0.3724	0.4139	0.8108	0.7383	0.4958	0.4453
(3, d , 0)	0.4310	0.4850	0.7660	0.6849	0.4806	0.4286
(4, d , 0)	0.4310	0.4829	0.7665	0.6864	0.4847	0.4315
(5, d , 0)	0.4298	0.4818	0.7668	0.6870	0.4831	0.4321
RV-UC(1)	0.3840	0.4221	0.8166	0.7382	0.5672	0.5160
RV-UC(2)	0.4374	0.4896	0.7676	0.6851	0.4999	0.4465
RRV-ARFIMA						
(0, d , 0)	0.4237	0.4768	0.7775	0.6935	0.5167	0.4579
(0, d , 1)	0.4264	0.4816	0.7745	0.6896	0.5045	0.4460
(0, d , 2)	0.4299	0.4869	0.7699	0.6848	0.4910	0.4342
(1, d , 0)	0.4266	0.4816	0.7751	0.6901	0.5067	0.4482
(1, d , 1)	0.4247	0.4792	0.7743	0.6903	0.5010	0.4433
(1, d , 2)	0.3972	0.4485	0.7935	0.7117	0.5034	0.4464
(2, d , 0)	0.4263	0.4812	0.7732	0.6889	0.4977	0.4401
(2, d , 1)	0.4276	0.4831	0.7719	0.6875	0.5003	0.4432
(2, d , 2)	0.4192	0.4714	0.7785	0.6958	0.5013	0.4453
(3, d , 0)	0.4322	0.4880	0.7693	0.6845	0.4949	0.4381
(4, d , 0)	0.4186	0.4738	0.7792	0.6944	0.5044	0.4461
(5, d , 0)	0.4163	0.4724	0.7806	0.6952	0.5062	0.4460
RRV-UC(1)	0.3768	0.4137	0.8543	0.7732	0.6344	0.5806
RRV-UC(1)'	0.4264	0.4806	0.7813	0.6955	0.5218	0.4648
RRV-UC(2)	0.4322	0.4862	0.7752	0.6900	0.5133	0.4556
RRV-UC(2)'	0.4303	0.4844	0.7762	0.6910	0.5133	0.4553

表 18: RV と RRV を用いた ARFIMA モデルと UC モデルのベイズ予測の結果. R^2 は MZ 回帰の決定係数, RMSE は平均 2 乗誤差の平方根, MAE は平均絶対誤差を表し, ボラティリティの代理変数を RV と RRV とした場合のそれぞれについて計算している.

	RMSPE		MAPE	
	RV	RRV	RV	RRV
RV-ARFIMA				
(0, d , 0)	0.7368	0.5283	0.5041	0.3845
(0, d , 1)	0.6786	0.4843	0.4737	0.3574
(0, d , 2)	0.6454	0.4625	0.4504	0.3406
(1, d , 0)	0.6865	0.4893	0.4786	0.3610
(1, d , 1)	0.6760	0.4875	0.4645	0.3528
(1, d , 2)	0.6372	0.4562	0.4440	0.3362
(2, d , 0)	0.6397	0.4611	0.4532	0.3433
(2, d , 1)	0.6528	0.4644	0.4470	0.3396
(2, d , 2)	0.8421	0.5848	0.4779	0.3611
(3, d , 0)	0.6656	0.4756	0.4573	0.3458
(4, d , 0)	0.6875	0.4901	0.4693	0.3529
(5, d , 0)	0.6649	0.4793	0.4572	0.3480
RV-UC(1)	0.8909	0.6658	0.5957	0.4667
RV-UC(2)	0.7584	0.5418	0.5217	0.3952
RRV-ARFIMA				
(0, d , 0)	0.7408	0.5348	0.5240	0.3974
(0, d , 1)	0.7283	0.5191	0.5073	0.3819
(0, d , 2)	0.6912	0.4935	0.4789	0.3597
(1, d , 0)	0.7394	0.5268	0.5139	0.3872
(1, d , 1)	0.7185	0.5157	0.4943	0.3726
(1, d , 2)	0.7158	0.5158	0.4896	0.3693
(2, d , 0)	0.6931	0.4985	0.4854	0.3657
(2, d , 1)	0.6969	0.5008	0.4888	0.3683
(2, d , 2)	0.7251	0.5181	0.4978	0.3759
(3, d , 0)	0.7036	0.5006	0.4858	0.3658
(4, d , 0)	0.7211	0.5184	0.5006	0.3763
(5, d , 0)	0.7177	0.5117	0.5004	0.3753
RRV-UC(1)	1.3129	0.9822	0.8319	0.6568
RRV-UC(1)'	0.8287	0.5954	0.5675	0.4318
RRV-UC(2)	0.7897	0.5647	0.5449	0.4123
RRV-UC(2)'	0.7904	0.5656	0.5445	0.4118

表 19: RV と RRV を用いた ARFIMA モデルと UC モデルのベイズ予測の結果. RMSPE は平均 2 乗誤差率の平方根, MAE は平均絶対誤差率を表し, ボラティリティの代理変数を RV と RRV とした場合のそれぞれについて計算している.

	R^2		RMSE		MAE	
	log RV	log RRV	log RV	log RRV	log RV	log RRV
logRV-ARFIMA						
(0, d , 0)	0.6349	0.6728	0.4372	0.3774	0.3415	0.2927
(0, d , 1)	0.6460	0.6838	0.4292	0.3720	0.3327	0.2857
(0, d , 2)	0.6494	0.6870	0.4267	0.3706	0.3300	0.2848
(1, d , 0)	0.6458	0.6836	0.4299	0.3716	0.3333	0.2856
(1, d , 1)	0.6391	0.6772	0.4328	0.3763	0.3355	0.2897
(1, d , 2)	0.6394	0.6774	0.4326	0.3762	0.3362	0.2906
(2, d , 0)	0.6456	0.6832	0.4291	0.3726	0.3333	0.2880
(2, d , 1)	0.6434	0.6804	0.4305	0.3742	0.3349	0.2884
(2, d , 2)	0.6101	0.6449	0.4505	0.3958	0.3397	0.2927
(3, d , 0)	0.6447	0.6820	0.4300	0.3729	0.3336	0.2867
(4, d , 0)	0.6450	0.6827	0.4294	0.3729	0.3327	0.2857
(5, d , 0)	0.6395	0.6776	0.4323	0.3766	0.3355	0.2897
logRV-UC(1)	0.5528	0.5793	0.5171	0.4420	0.4049	0.3481
logRV-UC(2)	0.6436	0.6797	0.4329	0.3729	0.3374	0.2895
logRRV-ARFIMA						
(0, d , 0)	0.6362	0.6758	0.4514	0.3776	0.3556	0.2945
(0, d , 1)	0.6388	0.6793	0.4458	0.3739	0.3497	0.2909
(0, d , 2)	0.6426	0.6829	0.4420	0.3712	0.3463	0.2880
(1, d , 0)	0.6386	0.6791	0.4471	0.3744	0.3509	0.2917
(1, d , 1)	0.6367	0.6777	0.4458	0.3744	0.3490	0.2901
(1, d , 2)	0.6318	0.6721	0.4479	0.3774	0.3498	0.2913
(2, d , 0)	0.6373	0.6772	0.4460	0.3748	0.3497	0.2915
(2, d , 1)	0.6388	0.6788	0.4457	0.3741	0.3487	0.2898
(2, d , 2)	0.6160	0.6537	0.4560	0.3878	0.3524	0.2934
(3, d , 0)	0.6410	0.6816	0.4444	0.3725	0.3469	0.2883
(4, d , 0)	0.6429	0.6831	0.4430	0.3715	0.3471	0.2878
(5, d , 0)	0.6344	0.6759	0.4459	0.3751	0.3489	0.2907
logRRV-UC(1)	0.5624	0.5922	0.5086	0.4324	0.3991	0.3396
logRRV-UC(1)'	0.6366	0.6755	0.4516	0.3780	0.3562	0.2969
logRRV-UC(2)	0.6377	0.6767	0.4504	0.3770	0.3540	0.2952
logRRV-UC(2)'	0.6359	0.6759	0.4515	0.3776	0.3548	0.2958

表 20: RV と RRV の対数値を用いた ARFIMA モデルと UC モデルのベイズ予測の結果. R^2 は MZ 回帰の決定係数, RMSE は平均 2 乗誤差の平方根, MAE は平均絶対誤差を表し, ボラティリティの対数値の代理変数を RV と RRV の対数値とした場合のそれぞれについて計算している.

	RMSPE		MAPE	
	log RV	log RRV	log RV	log RRV
logRV-ARFIMA				
(0, d , 0)	13.7976	12.7241	2.0850	2.2722
(0, d , 1)	15.7854	11.7850	2.1263	2.2081
(0, d , 2)	20.1540	9.9745	2.2807	2.0573
(1, d , 0)	14.5958	11.9326	2.0766	2.2193
(1, d , 1)	21.9733	12.8467	2.3873	2.2798
(1, d , 2)	17.9024	9.7506	2.2503	2.0363
(2, d , 0)	21.3913	10.7571	2.3537	2.1558
(2, d , 1)	13.5290	12.1508	2.0875	2.2775
(2, d , 2)	19.9459	9.6599	2.2559	2.0162
(3, d , 0)	26.2668	9.4222	2.5722	2.0213
(4, d , 0)	23.1302	10.5231	2.4518	2.0961
(5, d , 0)	16.0056	11.4143	2.1709	2.1585
logRV-UC(1)	38.6334	9.6037	3.1917	2.2455
logRV-UC(2)	20.0977	11.9064	2.3378	2.2292
logRRV-ARFIMA				
(0, d , 0)	6.8832	12.8455	1.9003	2.2940
(0, d , 1)	6.2773	13.5530	1.8528	2.3392
(0, d , 2)	11.8492	11.9163	2.1306	2.2203
(1, d , 0)	5.9002	13.7539	1.8200	2.3535
(1, d , 1)	5.3396	13.0000	1.7700	2.3091
(1, d , 2)	13.7515	12.8662	2.2140	2.2812
(2, d , 0)	11.5830	13.2881	2.0855	2.3158
(2, d , 1)	6.7610	12.7315	1.8900	2.2887
(2, d , 2)	9.0291	11.2960	1.9905	2.1516
(3, d , 0)	13.0197	12.4389	2.1901	2.2923
(4, d , 0)	10.1512	11.2538	2.0542	2.2003
(5, d , 0)	8.6601	13.2278	1.9923	2.2986
logRRV-UC(1)	27.9702	12.8223	2.9591	2.5956
logRRV-UC(1)'	11.4997	14.5100	2.1541	2.4670
logRRV-UC(2)	11.6734	13.6460	2.1436	2.3941
logRRV-UC(2)'	10.0265	13.6465	2.0778	2.3969

表 21: RV と RRV の対数値を用いた ARFIMA モデルと UC モデルのベイズ予測の結果. RMSPE は平均 2 乗誤差率の平方根, MAE は平均絶対誤差率を表し, ボラティリティの対数値の代理変数を RV と RRV の対数値とした場合のそれぞれについて計算している.

	RV	RRV
R^2	RV-UC(2)	RV-UC(2)
RMSE	RV-ARFIMA(0, d , 2)	RV-ARFIMA(0, d , 2)
MAE	RV-ARFIMA(1, d , 2)	RV-ARFIMA(1, d , 2)
RMSPE	RV-ARFIMA(1, d , 2)	RV-ARFIMA(1, d , 2)
MAPE	RV-ARFIMA(1, d , 2)	RV-ARFIMA(1, d , 2)
	log(RV)	log(RRV)
R^2	logRV-ARFIMA(0, d , 2)	logRV-ARFIMA(0, d , 2)
RMSE	logRV-ARFIMA(0, d , 2)	logRV-ARFIMA(0, d , 2)
MAE	logRV-ARFIMA(0, d , 2)	logRV-ARFIMA(0, d , 2)
RMSPE	logRRV-ARFIMA(1, d , 0)	logRV-ARFIMA(3, d , 0)
MAPE	logRRV-ARFIMA(1, d , 1)	logRRV-ARFIMA(2, d , 2)

表 22: RV と RRV 及びそれらの対数値を用いた ARFIMA モデルと UC モデルのベイズ予測の比較結果. 表には RV と RRV 及びそれらの対数値をボラティリティの代理変数とした場合に最もパフォーマンスのよいモデルを記している.

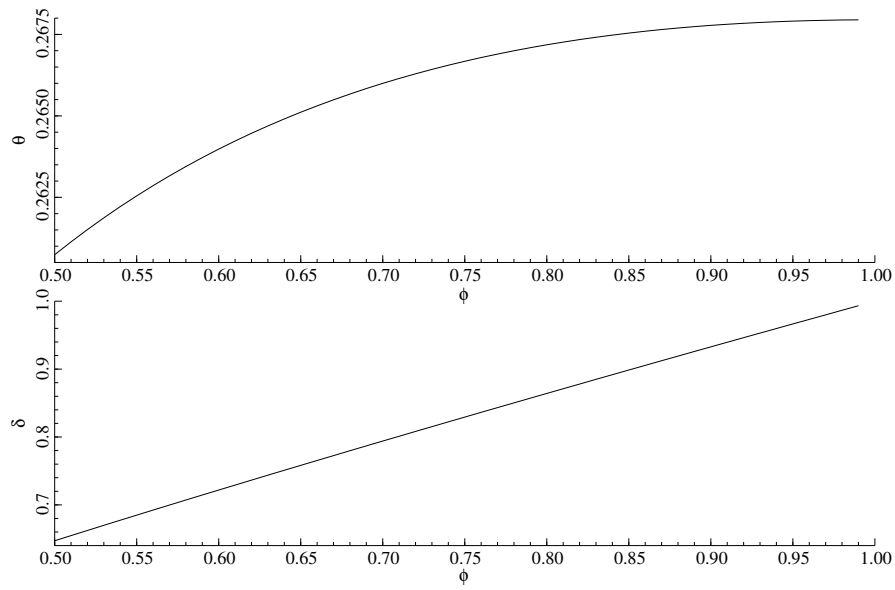


図 1: (14) 式の ϕ と θ との対応関係 (上) と, ϕ と (12) 式の δ との対応関係 (下).

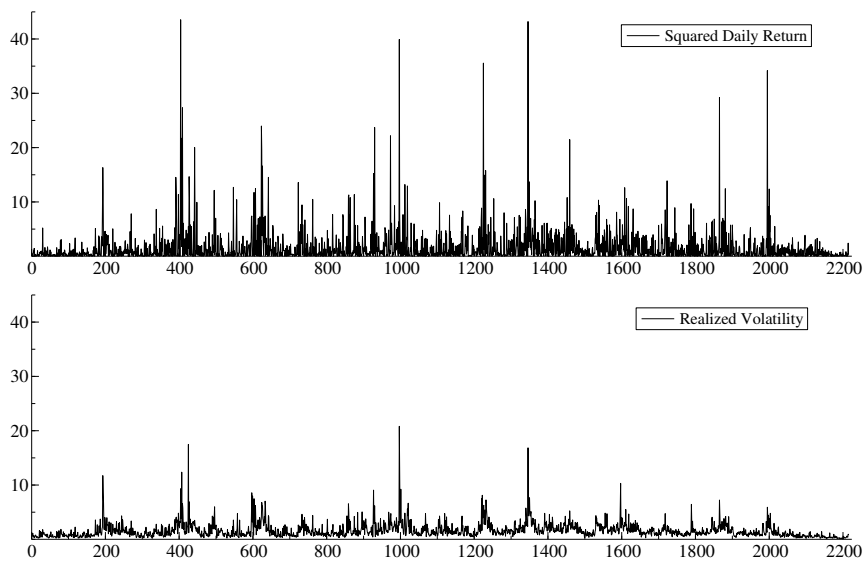


図 2: 1994 年 4 月 1 日から 2005 年 3 月 30 日まで (2215 日間) の日次収益率の 2 乗 (上) と RV (下).

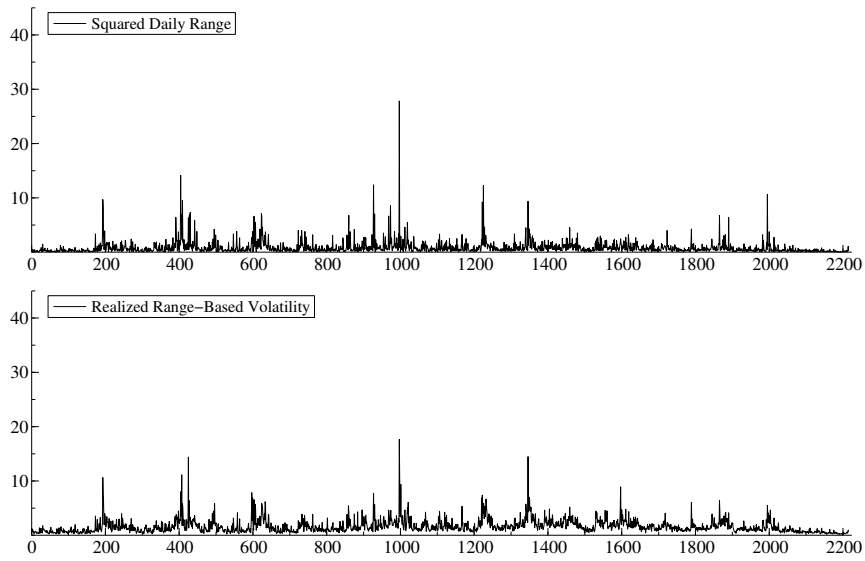


図 3: 1994 年 4 月 1 日から 2005 年 3 月 30 日まで (2215 日間) の日次レンジの 2 乗 (上) と RRV (下). ただし, 日次レンジの 2 乗は $4 \log 2$ で割って調整している.

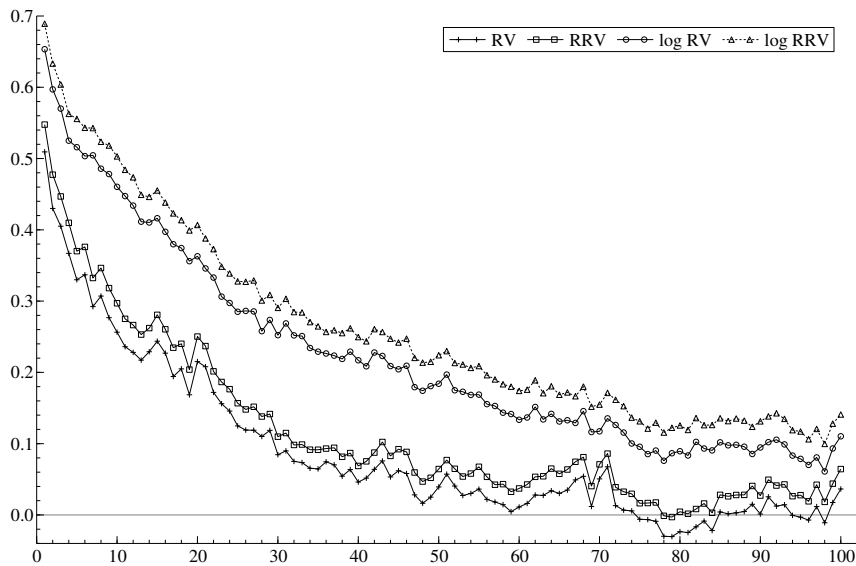


図 4: Hansen and Lunde (2005) の方法で調整した RV と RRV 及びそれらの対数値の自己相関関数.

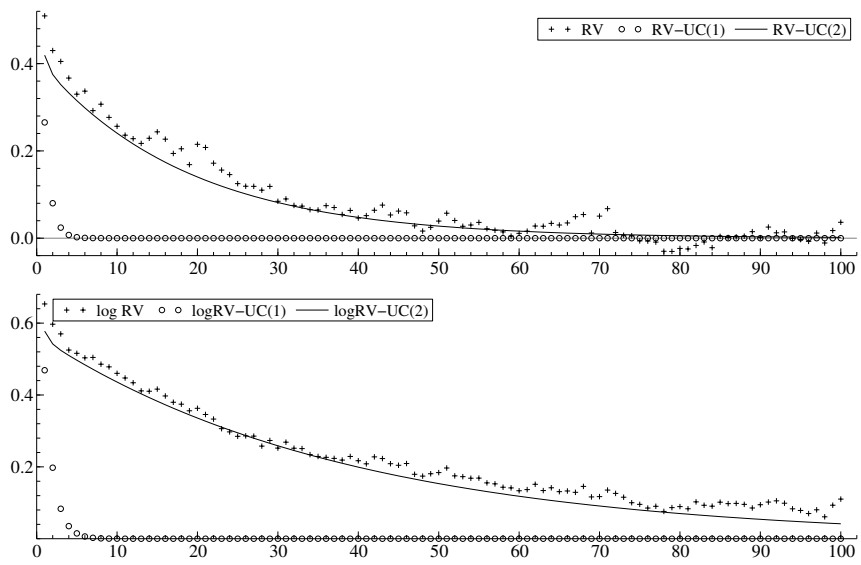


図 5: 上段は RV の自己相関関数 (+) と RV-UC(1) モデルの自己相関関数 (o) 及び RV-UC(2) モデルの自己相関関数 (—). 下段は RV の対数値についての同様の自己相関関数.