

離散連続選択アプローチを用いた 非線形料金体系下の需要関数の推定

宮脇 幸治*

Discrete/Continuous Choice Approach and Its Application to Demand Functions under Nonlinear Price System

Koji Miyawaki*

本論文では、離散連続選択アプローチを用いた非線形料金体系下の需要関数の推定を紹介すると共に、従来より効率的なマルコフ連鎖モンテカルロ法による推定手法を提案する。また、提案された手法を用いた日本の家庭用電力需要関数の実証分析を行う。

This paper reviews the discrete/continuous choice approach to demand functions under nonlinear price system, and proposes their estimation method by implementing Markov chain Monte Carlo simulator that is more efficient than those of previous studies. Proposed method is applied to estimate the Japanese residential electricity demand function.

1 はじめに

本論文では、離散連続選択アプローチを用いた非線形料金体系下の需要関数の推定を紹介すると共に、従来より効率的なマルコフ連鎖モンテカルロ (MCMC) 法による推定手法を提案する。

通常、経済理論では財に対して単一の価格を仮定したモデルを用いることが多い。しかし現実には、財によって複数の価格が観察されることがある。そのような料金体系は非線形料金体系と呼ばれ、規制産業で主に観察される。非線形料金体系の代表例はブロック料金制 (block rate pricing) と呼ばれる料金体系であり、消費量に応じてその価格が変化する。より具体的には、消費量がいくつかのブロックに分けられており、それぞれのブロックに対して異なる単価がつけられている料金体系をブロック料金制と呼ぶ。ブロック料金制は、電力、ガスや水道といった財や累進的な構造を持つ税 (所得税など) で採用されている。その他、複数の価格がつけられる料金体系としては、電力における昼間・夜間料金や鉄道や宅配便における距離別もしくは重量別料金が例としてあげられる。

単一の価格ではなく複数の価格を持つ財の需要関数を推定する場合において、単純に需要量を消費を行っている価格と所得で回帰した需要関数では、価格の選択行動が無視されているため、推定されるパラメータにバイアスが生じる。ブロック料金制の場合にはブロックと価格を同一視できるため、ブロックの選択を明示的に考慮して推定する必要がある。この問題は、Burtless and Hausman (1978) により効用最大化問題として初めて定式化され推定が行われた。彼らのアプローチは離散連続選択アプローチ (discrete/continuous choice approach) と呼ばれ、非線形料金体系下の需要関数の分析における標準的アプローチとなっている。より一般的な分析は、例えば Hanemann (1984), Hausman (1985) や Moffitt (1986) にまとめられている。

近年、離散連続選択アプローチを用いた実証分析はいくつかなされており、例えば労働供給 (Averett and Hotchkiss 1997)、自動車保有 (de Jong 1990)、水道 (Miyawaki, Omori and Hibiki 2006; Olmstead, Hanemann and Stavins 2007) やガス (Miyawaki and Omori 2007) などがある。本論文で実証分析がなされる電力に関しては (Reiss and White 2005; Miyawaki et al. 2006) がある。

*東京大学大学院経済学研究科，日本学術振興会特別研究員 (E-mail: ee57008@mail.ecc.u-tokyo.ac.jp).

しかしながら、多くの実証分析は限られた状況における分析となっている。離散連続選択アプローチを用いた場合、推定すべき統計的モデルは、多くの線形制約によりパラメータ空間が制約された第 V 型もしくは第 II 型多項トービットモデルとなることが知られている。(トービットモデルの分類については Amemiya 1985 の 10 章を参照) その結果モーメント法及び最尤法による推定が困難な状況が生じ、ブロック数を 2 の場合に限定することや、パラメータ空間の制約を考慮しないといった状況の単純化がしばしば行われる。例えば、日本では電力は 3-4 ブロックのブロック料金制で供給されているが、Reiss and White (2005) では、2 ブロックの場合かつパラメータ空間の制約を考慮していない電力需要関数が推定されている。これに対して、Miyawaki et al. (2006) では一般的な状況でのブロック料金制下の需要関数の MCMC 法を用いた推定手法を提案し、日本の水道及び電力需要関数の実証分析を行った。

本論文では、離散連続選択アプローチを用いた非線形料金体系下の需要関数の導出をブロック料金制の場合に焦点を当てて紹介すると共に日本の電力需要データを用いた家庭用電力需要関数の実証分析を行う。また Miyawaki et al. (2006) で指摘されていた推定手法の非効率性を改善する新しい推定手法も併せて提案する。本論文の構成は以下の通りである。まず 2 節及び 3 節において離散連続選択アプローチについて説明し、そのアプローチに基づく需要関数及び推定に用いるクロスセクションモデルを導出する。続いて、線形制約により切断された多変量正規分布からの新しい乱数発生法について 4 節で述べる。以上のクロスセクションモデル及び切断多変量正規分布からの乱数発生法を用いて、5 節及び 6 節でシミュレーション実験及び日本の家庭用電力需要関数の推定を行い、その結果を分析する。最後に 7 節で本論文のまとめ及び今後の課題について触れる。

2 離散連続選択アプローチによる需要関数の導出

本節では、非線形料金体系の代表例であるブロック料金制における消費者の効用最大化問題を定義し、それに対する離散連続選択アプローチを用いた需要関数の導出を行う。

まず消費者の効用最大化問題を定義する。消費者は、総所得 I の下で、 K ブロックのブロック料金制で供給されている財の消費量 $Y > 0$ とそれ以外の財の消費量 $Y_a > 0$ の組み合わせを決定する問題に直面している。ブロック料金制は以下の 3 種類の非負変数から構成される。

1. 第 k ブロックの価格 P_k ($k = 1, \dots, K$) .
2. 第 k ブロックの使用量の上限、閾値 \bar{Y}_k ($k = 0, \dots, K$) . ただし $\bar{Y}_0 \equiv 0$, $\bar{Y}_K \equiv \infty$ と定義する .
3. 固定費用 FC .

ブロック料金制を考えているので、価格 P_k は消費量に関して単調に変化し、(1) $P_k < P_{k+1}$ の場合を逓増型ブロック料金制 (increasing block rate pricing) , (2) $P_k > P_{k+1}$ の場合を逓減型ブロック料金制 (decreasing block rate pricing) , と呼ぶ。日本では水道や電力が逓増型、ガスが逓減型の料金体系で供給されている。一方、合成財 Y_a の価格は 1 に規準化されている。

この時、消費者の効用最大化問題は次のように定式化することができる。

$$\max_{Y, Y_a} U(Y, Y_a) \quad \text{subject to } Y_a + c(Y) \leq I. \quad (1)$$

ここで $c(Y)$ は消費量 Y に対する支出関数であって、次の式で定義されている。

$$c(Y) = FC + P_k(Y - \bar{Y}_{k-1}) + \sum_{j=1}^{k-1} P_j(\bar{Y}_j - \bar{Y}_{j-1}), \quad \text{if } \bar{Y}_{k-1} < Y \leq \bar{Y}_k. \quad (2)$$

図 1 は 3 ブロックの場合の逓増型と逓減型の予算線をそれぞれ描いている。図より、いずれのブロック料金制においても予算線が区分的線形になっていることが分かる。

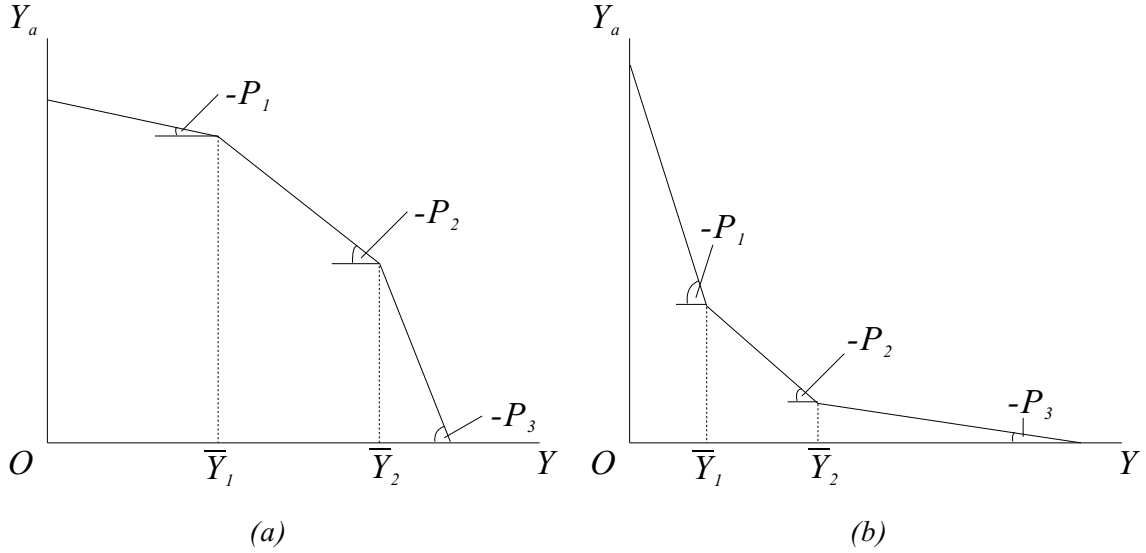


図 1: ブロック料金制の予算制約集合: (a) 逓増型ブロック料金制, (b) 逓減型ブロック料金制.

このような非線形予算制約下の最大化問題を解くための一般的な方法として, 離散連続選択アプローチがある. 離散連続選択アプローチの特徴は, 区分的線形な予算制約下の最大化問題を線形制約下の最大化問題の集合に置き換えることにある. 具体的には以下の 2 段階の最大化問題を解くことで解を得る.

離散連続選択アプローチ

Step 1. 各 $k = 1, \dots, K$ に対して以下の最大化問題の解及び最大値を求める.

$$V_k^* = \sup_{Y, Y_a} U(Y, Y_a) \quad \text{subject to } (Y, Y_a) \in \{(Y, Y_a) \mid \bar{Y}_{k-1} < Y \leq \bar{Y}_k, Y_a + c(Y) \leq I\}. \quad (3)$$

Step 2. $\max\{V_1^*, \dots, V_K^*\}$ を求める.

元の最大化問題 (1) の解は, Step 2 で得られた V_k^* に対応する Step 1 の最大化問題 (3) の解で得られる. 第一段階が連続量の最大化問題であり第二段階が離散的な選択であるため離散連続選択アプローチと呼ばれる.

明示的な需要関数の導出には, 離散連続選択アプローチの Step 1 で用いた効用最大化問題 (3) の予算制約をやや緩める一方で, 元の効用最大化問題 (1) の予算制約集合の性質を用いる. まず Step 1 の効用最大化問題 (3) の予算制約集合を含む新しい効用最大化問題を考える. 新しい効用最大化問題は条件付き効用最大化問題 (conditional utility maximization problem) と呼ばれ, 各ブロック ($k = 1, \dots, K$) に対して定義される. 第 k 番目のブロックに対する条件付き効用最大化問題は,

$$\max_{Y, Y_a} U(Y, Y_a) \quad \text{subject to } Y_a + P_k Y \leq Q_k, \quad (4)$$

と定式化される. ここで $Q_k (k = 1, \dots, K)$ は帰属所得 (virtual income) と呼ばれる変数であり, $Q_k \equiv I - FC - \sum_{j=1}^{k-1} (P_j - P_{j+1}) \bar{Y}_j$ である. 以下ではこの条件付き最大化問題の解及び最大値をそれぞれ条件付き需要 (conditional demand) 及び条件付き間接効用 (conditional indirect utility) と呼び, Y_k 及び V_k で表す.

条件付き効用最大化問題を定義すれば, 元の効用最大化問題 (1) の予算制約集合の性質を用いることで需要関数を明示的に導出することができる. まず逓増型ブロック料金制下の需要関数は,

$$Y = \begin{cases} Y_k, & \text{if } \bar{Y}_{k-1} < Y_k < \bar{Y}_k \text{ and } k = 1, \dots, K, \\ \bar{Y}_k, & \text{if } Y_{k+1} \leq \bar{Y}_k \leq Y_k \text{ and } k = 1, \dots, K-1, \end{cases} \quad (5)$$

となる．ここでは元の効用最大化問題 (1) の予算制約集合の凸性を用いている．一方逓減型のブロック料金制下の需要関数は，

$$Y = Y_k, \quad \text{if } V_k = \max_j V_j \text{ and } k = 1, \dots, K, \quad (6)$$

となるが，消費者理論の双対性を用いればさらに変形することができ，

$$Y = Y_k, \quad \text{if } \begin{cases} \bar{Y}_{k-1} < Y_k < \bar{Y}_k, \\ Y_k > H_j, & \text{for } j < k, \\ Y_k < H_j, & \text{for } j > k, \end{cases} \quad (7)$$

となる．ここで $H_j = (Q_j - Q_k)/(P_j - P_k)$ である．双対性を用いた導出は Miyawaki and Omori (2007) の 2.3 節を参照されたい．

3 クロスセクションモデル

本節では，前節で導出された需要関数を多項トービットモデルとして定式化し，MCMC 法によるそれらの推定手法を説明する．

3.1 モデル

まず条件付き需要関数が対数線形モデルであると仮定する．つまり第 i 番目の消費者 ($i = 1, \dots, n$) の条件付き需要関数は，

$$\ln Y_{ik} = \beta_1 \ln P_{ik} + \beta_2 \ln Q_{ik} \iff y_{ik} = \beta_1 p_{ik} + \beta_2 q_{ik} \equiv \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}, \quad (8)$$

と仮定する．上式の右側は，モデルの簡略化のため，対応する変数の対数値を小文字で表したものである．小文字の変数は以下の記述にも用いるためすべて定義しておく． $(y_i, y_{ik}, \bar{y}_{ik}, p_{ik}, q_{ik}) \equiv (\ln Y_i, \ln Y_{ik}, \ln \bar{Y}_{ik}, \ln P_{ik}, \ln Q_{ik})$ ．また $\mathbf{x}_i = (p_{ik}, q_{ik})'$ ， $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2)'$ である．対数線形モデルは需要関数の分析にしばしば用いられるモデルであり，価格及び帰属所得の係数はそれぞれ需要の価格弾力性及び (帰属) 所得弾力性を表す．

続いてデータ発生過程を特定化する．離散連続選択アプローチに基づく需要関数の推定には，次の 2 つの確率項を仮定することが通常である．(例えば Moffitt 1986 の 3 節参照) 一つは消費者の選好の異質性 (heterogeneity of preferences) と呼ばれる潜在変数 w_i^* ，もう一つは測定誤差 u_i である．

消費者の選好の異質性は条件付き需要に対して加法的に加わる確率項であり，線形構造を持つ非確率項と平均 0，分散 σ_v^2 の正規分布に従う確率項に分かれる．より正確には，

$$w_i^* = \mathbf{z}_i' \boldsymbol{\delta} + v_i, \quad v_i \sim \text{i.i.d. } N(0, \sigma_v^2), \quad (9)$$

と仮定される．ここで \mathbf{z}_i 及び $\boldsymbol{\delta}$ は $d \times 1$ ベクトルであり，それぞれ選好の異質性の説明変数及びその係数ベクトルを表す．その結果，逓増型のブロック料金制の需要関数は，

$$y_i^* = \begin{cases} y_{ik} + w_i^*, & \text{if } \bar{y}_{i,k-1} < y_{ik} + w_i^* < \bar{y}_{ik} \text{ and } k = 1, \dots, K_i, \\ \bar{y}_{ik}, & \text{if } y_{i,k+1} + w_i^* \leq \bar{y}_{ik} \leq y_{ik} + w_i^* \text{ and } k = 1, \dots, K_i - 1, \end{cases} \quad (10)$$

逓減型の場合は，

$$y_i^* = y_{ik} + w_i^*, \quad \text{if } \begin{cases} \bar{y}_{k-1} < y_{ik} + w_i^* < \bar{y}_k, \\ y_{ik} + w_i^* > h_j, & \text{for } j < k, \\ y_{ik} + w_i^* < h_j, & \text{for } j > k, \end{cases} \quad (11)$$

となる．ただし $h_j = \ln H_j = \ln\{(Q_{ij} - Q_{ik})/(P_{ij} - P_{ik})\}$ である．以下， y_i^* を潜在需要 (unobserved demand) と呼ぶことにする．

選好の異質性は，条件付き需要を価格と帰属所得のみならず消費者に特有な変数によって説明するための潜在変数である．それに加えて，選好の異質性は最適な潜在需要の状態を決める潜在変数であると解釈することができる．潜在需要の状態とは，逓増型のブロック料金制下の需要関数の場合，どのブロックの条件付き需要もしくは閾値を選んでいるかの2種類を指し，逓減型の場合はブロック番号を指す．より正確に状態 s_i^* を定義すれば，逓増型のブロック料金制下の需要関数においては $s_i^* = 1, \dots, 2K_i - 1$ をとる離散変数であって，

$$s_i^* = \begin{cases} 2k-1, & \text{if } y_i^* = y_{ik} + w_i^* \text{ and } k = 1, \dots, K_i, \\ 2k, & \text{if } y_i^* = \bar{y}_{ik} \text{ and } k = 1, \dots, K_i - 1. \end{cases} \quad (12)$$

一方，逓減型の場合の需要関数に対しては $s_i^* = 1, \dots, K_i$ をとる離散変数で定義され，

$$s_i^* = k, \quad \text{if } \begin{cases} \bar{y}_{k-1} < y_{ik} + w_i^* < \bar{y}_k, \\ y_{ik} + w_i^* > h_j, & \text{for } j < k, \\ y_{ik} + w_i^* < h_j, & \text{for } j > k. \end{cases} \quad (13)$$

この時，状態に応じて選好の異質性の取りうる値の範囲 $(-\infty, \infty)$ を排反な区間に分割することができる．つまり逓増型の場合，

$$\begin{aligned} s_i^* = 2k-1 &\iff \bar{y}_{i,k-1} < y_{ik} + w_i^* < \bar{y}_{ik} \iff w_i^* \in R_{i,2k-1} = (\bar{y}_{i,k-1} - y_{ik}, \bar{y}_{ik} - y_{ik}), \\ s_i^* = 2k &\iff y_{i,k+1} + w_i^* \leq \bar{y}_{ik} \leq y_{ik} + w_i^* \iff w_i^* \in R_{i,2k} = (\bar{y}_{ik} - y_{ik}, \bar{y}_{ik} - y_{i,k+1}). \end{aligned} \quad (14)$$

逓減型の場合，

$$s_i^* = k \iff \begin{cases} \bar{y}_{k-1} < y_i^* < \bar{y}_k \\ y_i^* > h_j, & \text{for } j < k \iff w_i^* \in R_{ik} = \left\{ \max\left(\bar{y}_{i,k-1}, \max_{j < k} h_{ij}\right) - y_{ik}, \min\left(\bar{y}_{ik}, \min_{j > k} h_{ij}\right) - y_{ik} \right\}, \\ y_i^* < h_j, & \text{for } j > k \end{cases} \quad (15)$$

と変形できる．その結果，最適な潜在需要の状態は潜在変数である選好の異質性によって決定されていると解釈できる．

もう一つの確率項，測定誤差は潜在需要 y_i に加わるものであり，

$$y_i = y_i^* + u_i, \quad u_i \sim \text{i.i.d. } N(0, \sigma_u^2), \quad (16)$$

とする．

以上の準備の下，逓増型及び逓減型のブロック料金制下の需要関数のクロスセクションモデルは，それぞれ以下の式で表すことができる．逓増型の場合：

$$\begin{aligned} y_{ik} &= \mathbf{x}'_{ik} \boldsymbol{\beta}, \quad k = 1, \dots, K_i, \\ w_i^* &= \mathbf{z}'_i \boldsymbol{\delta} + v_i, \quad v_i \sim \text{i.i.d. } N(0, \sigma_v^2), \\ s_i^* &= \begin{cases} 2k-1, & \text{if } w_i^* \in R_{i,2k-1} \text{ and } k = 1, \dots, K_i, \\ 2k, & \text{if } w_i^* \in R_{i,2k} \text{ and } k = 1, \dots, K_i - 1, \end{cases} \\ y_i^* &= \begin{cases} y_{ik} + w_i^*, & \text{if } s_i^* = 2k-1 \text{ and } k = 1, \dots, K_i, \\ \bar{y}_{ik}, & \text{if } s_i^* = 2k \text{ and } k = 1, \dots, K_i - 1, \end{cases} \\ y_i &= y_i^* + u_i, \quad u_i \sim \text{i.i.d. } N(0, \sigma_u^2). \end{aligned} \quad (17)$$

一方，逡減型の場合：

$$\begin{aligned}
y_{ik} &= \mathbf{x}'_{ik} \boldsymbol{\beta}, \quad k = 1, \dots, K_i, \\
w_i^* &= \mathbf{z}'_i \boldsymbol{\delta} + v_i, \quad v_i \sim \text{i.i.d. } N(0, \sigma_v^2), \\
s_i^* &= k, \quad \text{if } w_i^* \in R_{ik} \text{ and } k = 1, \dots, K_i, \\
y_i &= y_i^* + u_i = y_{is_i^*} + w_i^* + u_i, \quad u_i \sim \text{i.i.d. } N(0, \sigma_u^2).
\end{aligned} \tag{18}$$

これらのモデルは統計的モデルとしては多項トービットモデルになっており，それぞれ式 (17) が第 V 型，式 (18) が第 II 型の多項トービットモデルとなっている．

3.2 事前分布，事後分布及びギブスサンプラー

前節で得られたモデルを推定するために，本論文では MCMC 法を用いた推定手法を提案する．まず，パラメータの事前分布として正規-ガンマ分布を仮定する．つまり， $\boldsymbol{\beta}$ 及び $\boldsymbol{\delta}$ はそれぞれ σ_u^2 及び σ_v^2 で条件付けられた多変量正規分布， σ_u^2 及び σ_v^2 は逆ガンマ分布であるとする．より正確には，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta} \mid \sigma_u^2 &\sim N_2 \left(\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\beta},j,0}, \sigma_u^2 \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\beta},0} \right), \quad \boldsymbol{\delta} \mid \sigma_v^2 \sim N_d \left(\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\delta},0}, \sigma_v^2 \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\delta},0} \right), \\
\sigma_u^2 &\sim IG \left(\frac{n_{u,0}}{2}, \frac{S_{u,0}}{2} \right), \quad \sigma_v^2 \sim IG \left(\frac{n_{v,0}}{2}, \frac{S_{v,0}}{2} \right),
\end{aligned} \tag{19}$$

と仮定する．ここで， $\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\beta},j,0}$ は 2×1 既知ベクトル， $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\beta},0} = \text{diag}(\sigma_{\beta_1,0}^2, \sigma_{\beta_2,0}^2)$ は 2×2 既知共分散行列， $\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\delta},0}$ は $d \times 1$ 既知ベクトル， $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\delta},0}$ は $d \times d$ 既知共分散行列， $n_{v,0}$, $S_{v,0}$, $n_{u,0}$ 及び $S_{u,0}$ は既知の正定数を表す．また多変量正規分布の下付き数字はその次元を表す．これらの事前分布をまとめて $\pi(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\delta}, \sigma_u^2, \sigma_v^2)$ と表記する．

続いて尤度関数を導出する．第 i 番目の消費者の需要 y_i の尤度を潜在変数 s_i^* と w_i^* で補った尤度関数は，

$$\begin{aligned}
f(y_i, s_i^*, w_i^* \mid \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\delta}, \sigma_u^2, \sigma_v^2) &= f(y_i \mid s_i^*, w_i^*, \boldsymbol{\beta}, \sigma_u^2) f(s_i^*, w_i^* \mid \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\delta}, \sigma_v^2) \\
&\propto (\sigma_u \sigma_v)^{-1} \exp \left[-\frac{1}{2} \left\{ \sigma_u^{-2} (y_i - y_i^*)^2 + \sigma_v^{-2} (w_i^* - \mathbf{z}'_i \boldsymbol{\delta})^2 \right\} \right] I(w_i^* \in R_{is_i^*}) I(\boldsymbol{\beta} \in SR_i),
\end{aligned} \tag{20}$$

と書ける．ここで $I(A)$ は定義関数であり， A が真の場合 1，そうでない場合は 0 を取る関数である．最後の定義関数 $I(\boldsymbol{\beta} \in SR_i)$ は分離条件と呼ばれる条件を表しており，選好の異質性の区間 R_{ik} が排反に分けられるための条件である．分離条件は Miyawaki et al. (2006) で初めて導入され，従来の研究では議論されていない．領域 SR_i は $\boldsymbol{\beta}$ に関する線形制約の集合であり，

$$SR_i = \bigcap_{j=1}^{K_i-1} \{ \boldsymbol{\beta} \mid \mathbf{x}'_{i,j+1} \boldsymbol{\beta} \leq \mathbf{x}'_{i,j} \boldsymbol{\beta} + \bar{y}_{ik}^+ \}, \tag{21}$$

と定義される．ただし， $k = 1, \dots, K_i - 1$ に対して，逡増型の場合 $\bar{y}_{ik}^+ = 0$ ，逡減型の場合 $\bar{y}_{ik}^+ = \max(\bar{y}_{ik}, \max_{l < k+1} h_{il}) - \min(\bar{y}_{ik}, \min_{l > k} h_{il})$ ．

分離条件は多項トービットモデルの閾値にパラメータが含まれている限り常に必要な条件である．しかしその数は選択枝数（ブロック料金制のモデルの場合ブロック数）と観測値数に比例して増える．そのため MCMC 法以外の推定方法を用いて全ての制約を評価して推定することは困難である．分離条件の存在は MCMC 法を用いて推定する理由の一つとなっている．

各消費者の尤度関数を導出できれば，事後分布を導出することができる．事後分布は，

$$\begin{aligned}
\pi(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\delta}, \sigma_u^2, \sigma_v^2, \mathbf{s}^*, \mathbf{w}^* \mid \mathbf{y}) &\propto \pi(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\delta}, \sigma_u^2, \sigma_v^2) \\
&\times (\sigma_u \sigma_v)^{-n} \exp \left[-\frac{1}{2} \left\{ \sigma_u^{-2} (\mathbf{y} - \mathbf{y}^*)' (\mathbf{y} - \mathbf{y}^*) + \sigma_v^{-2} (\mathbf{w}^* - \mathbf{Z} \boldsymbol{\delta})' (\mathbf{w}^* - \mathbf{Z} \boldsymbol{\delta}) \right\} \right] \\
&\times \prod_{i=1}^n \left\{ I(w_i^* \in R_{is_i^*}) I(\boldsymbol{\beta} \in SR_i) \right\}, \tag{22}
\end{aligned}$$

と書ける．ここで， $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)'$ ， $\mathbf{y}^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*)'$ ， $\mathbf{s}^* = (s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*)'$ ， $\mathbf{w}^* = (w_1^*, w_2^*, \dots, w_n^*)'$ ， $\mathbf{Z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)'$ とした．

これらの事後分布は非常に多くの線形制約式で切断された複雑な分布であるため解析的に分析を行うことは困難である．そのため，本論文ではギブスサンプラーと呼ばれる MCMC 法の標準手法を用いることで，これらの事後分布からの標本を得，得られた標本を用いて分析を行う．ギブスサンプラーのアルゴリズムは，以下の 5 ステップで記述される．

アルゴリズム 1: クロスセクションモデルの MCMC アルゴリズム

Step 1. パラメータ及び潜在変数 $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{s}^*, \mathbf{w}^*, \sigma_u^2, \sigma_v^2)$ に初期値を与える．

Step 2. $(\sigma_u^2, \boldsymbol{\beta})$ を $\mathbf{s}^*, \mathbf{w}^*$ を所与として発生させる．

Step (a). σ_u^2 を $\mathbf{s}^*, \mathbf{w}^*$ を所与として逆ガンマ分布より発生させる．

Step (b). $\boldsymbol{\beta}$ を $\mathbf{s}^*, \mathbf{w}^*, \sigma_u^2$ を所与として切断多変量正規分布より発生させる．

Step 3. $(\sigma_v^2, \boldsymbol{\delta})$ を \mathbf{w}^* を所与として発生させる．

(a). σ_v^2 を \mathbf{w}^* を所与として逆ガンマ分布より発生させる．

(b). $\boldsymbol{\delta}$ を \mathbf{w}^*, σ_v^2 を所与として多変量正規分布より発生させる．

Step 4. (s_i^*, w_i^*) を $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\delta}, \sigma_u^2, \sigma_v^2$ ($i = 1, \dots, n$) を所与として発生させる．

(a). s_i^* を $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\delta}, \sigma_u^2, \sigma_v^2$ を所与として多項分布より発生させる．

(b). w_i^* を $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\delta}, s_i^*, \sigma_u^2, \sigma_v^2$ を所与として切断正規分布より発生させる．

Step 5. Step 2 に戻る．

Step 2-(b) を除いた，それぞれのステップで用いられる条件付き事後分布は通常分布 (正規分布，逆ガンマ分布，多項分布) となる．よって， $\boldsymbol{\beta}$ の標本を除き，その他のパラメータ及び潜在変数の標本を得るのは容易である．具体的な条件付き事後分布は補論 A.1 にまとめている．

Miyawaki et al. (2006) では，Step 2-(b) で必要となる多くの線形制約で切断された多変量正規分布からの乱数発生を避け， β_1 と β_2 の条件付き事後分布をそれぞれ解析的に求め，それらを用いたアルゴリズムを提案している．(彼らの論文の 3.5 節，Algorithm 1.1 参照) しかし β_1 と β_2 の MCMC 標本の自己相関が非常に高く，それらの事後分布への収束が遅いことが分かったため，彼らの論文では一般化ギブスステップ (generalized Gibbs step; GGS) を用いてアルゴリズムの改善を行った．(彼らの論文の 3.6 節，Algorithm 1.2 参照) しかし，次節で提案する乱数発生法を用いれば，Step 2-(b) で必要となる切断多変量正規分布からの標本を直接得ることができる．

4 線形制約により切断された多変量正規分布に従う乱数発生

4.1 従来の乱数発生法

従来，線形制約式で切断された多変量正規分布からの乱数発生法はギブスサンプラーによるものが多いが提案されており，本節では代表的な 2 つの方法を紹介する．また，本節の乱数発生法で用いる z_{-i} を定義しておくとし， $n-1 \times 1$ ベクトル z_{-i} とは $n \times 1$ ベクトル \mathbf{z} からその第 i 行 z_i を除いたものである．

Geweke (1991) の 3 節では，次のような分布に従う n 次元確率変数ベクトル \mathbf{x} の乱数の発生法が提案されている．

$$\mathbf{x} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}), \quad \mathbf{a} \leq \mathbf{D}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}. \quad (23)$$

ここで $\boldsymbol{\mu}$ ， \mathbf{a} と \mathbf{b} は既知の $n \times 1$ ベクトル， $\boldsymbol{\Sigma}$ は既知の $n \times n$ 共分散行列， \mathbf{D} は既知の正則な $n \times n$ 行列であると仮定する．その乱数発生法は次の 3 ステップで構成される．

Geweke (1991) の乱数発生法

Step 1. $\mathbf{T} = \mathbf{D}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{D}'$ ， $\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{a} - \mathbf{D}\boldsymbol{\mu}$ ， $\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b} - \mathbf{D}\boldsymbol{\mu}$ を求める．

Step 2. ギブスサンプラーを用いて \mathbf{z} を以下の切断多変量正規分布より発生させる .

$$\mathbf{z} \sim N_n(\mathbf{0}, \mathbf{T}), \quad \tilde{\mathbf{a}} \leq \mathbf{z} \leq \tilde{\mathbf{b}}. \quad (24)$$

ギブスサンプラーは次の 3 ステップよりなる .

- (a). \mathbf{z} に初期値を与える .
- (b). 各 $i = 1, \dots, n$ に対して , z_i を次の切断正規分布より発生させる .

$$z_i | \mathbf{z}_{-i} \sim N(\mu_i, \sigma_{ii}^2), \quad \tilde{a}_i \leq z_i \leq \tilde{b}_i. \quad (25)$$

- (c). Step (b) に戻る .

Step 3. $\mathbf{x} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{z}$ と変換する .

ここで (1) $\mu_i = \mathbf{t}'_{-i} \boldsymbol{\Sigma}_{-i} \mathbf{z}_{-i}$, (2) $\sigma_{ii}^2 = \boldsymbol{\Sigma}_{ii} - \mathbf{t}'_{-i} \boldsymbol{\Sigma}_{-i} \mathbf{t}_{-i}$, (3) $n-1 \times 1$ ベクトル \mathbf{t}_{-i} は , \mathbf{T} の第 i 列を \mathbf{t}_i とすると , \mathbf{t}_i から第 i 行を除いたもの , (4) $n-1 \times n-1$ 行列 $\boldsymbol{\Sigma}_{-i}$ は $\boldsymbol{\Sigma}$ から第 i 行 , 第 i 列を除いたもの , (5) スカラー $\boldsymbol{\Sigma}_{ii}$ は $\boldsymbol{\Sigma}$ の第 (i, i) 要素である .

Geweke (1991) の方法では線形制約式を表す行列 \mathbf{D} が正則である条件が必要であった . そのため適用可能な状況が制約式の数 x の次元と一致しかつ制約式が一次独立である場合に限定され , 一般的に用いることが難しい .

一方 , Rodriguez-Yam, Davis and Scharf (2004) の 3.1 節では , 制約式の数 x の次元とは異なる場合や制約式の一部が一次従属である場合にも適用可能な , より一般的な乱数発生法が提案されている . (彼らの論文の 3.1 節 , **Sampler TN2**) この方法は , 多変量正規分布の共分散行列を単位行列にする変数変換を用いているため , Geweke (1991) の方法より効率的な乱数発生を行うことができるとされている . 乱数発生 of 効率性に関する詳しい比較は Rodriguez-Yam et al. (2004) の 3.2 節を参照されたい .

具体的な乱数発生法は以下の 3 ステップとなる .

Rodriguez-Yam et al. (2004) の乱数発生法

Step 1. $\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}$, $\tilde{\boldsymbol{\mu}} = \mathbf{A}\boldsymbol{\mu}$ を求める . ここで \mathbf{A} は $\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}' = \mathbf{I}$ を満たすような $n \times n$ 正則行列とする . (通常は $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ のコレスキー分解を転置したものを用いる .)

Step 2. ギブスサンプラーを用いて \mathbf{z} を以下の切断多変量正規分布より発生させる .

$$\mathbf{z} \sim N_n(\tilde{\boldsymbol{\mu}}, \mathbf{I}), \quad \mathbf{a} \leq \tilde{\mathbf{D}}\mathbf{z} \leq \mathbf{b}. \quad (26)$$

ギブスサンプラーは次の 3 ステップよりなる .

- (a). \mathbf{z} に初期値を与える .
- (b). 各 $i = 1, \dots, n$ に対して , z_i を次の切断正規分布より発生させる .

$$z_i | \mathbf{z}_{-i} \sim N(\tilde{\mu}_i, 1), \quad \mathbf{a} - \tilde{\mathbf{D}}_{-i}\mathbf{z}_{-i} \leq \tilde{\mathbf{d}}_i z_i \leq \mathbf{b} - \tilde{\mathbf{D}}_{-i}\mathbf{z}_{-i}, \quad (27)$$

- (c). Step (b) に戻る .

Step 3. $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{z}$ と変換する .

ここで , $\tilde{\mathbf{d}}_i$ は $\tilde{\mathbf{D}}$ の第 i 列 , $\tilde{\mathbf{D}}_{-i}$ は $\tilde{\mathbf{D}}$ から第 i 列 $\tilde{\mathbf{d}}_i$ を削除した行列を表す . この乱数発生法は , Geweke (1991) の方法と比べて \mathbf{D} に制約を置かないという点で一般的な方法といえる .

いずれの方法もギブスサンプラーを用いて乱数発生を行っている . その理由は一変量の切断正規分布からの乱数発生が容易なためである . しかし , 本論文の Step 2-(b) のように , 他のサンプラーの一部として使うには不十分な部分が 2 点ある : (1) 適切な Step 2-(b) と (c) の繰り返し回数を決定する必要がある . (2) 変数変換を行っているため , Step 1 , 2-(b) , 3 を取り出して使うことができない . 後者に関して , 変数変換を行わないギブスサンプラーを構成することは可能であるが , 多変量正規分布の共分散構造の影響が残るため Rodriguez-Yam et al. (2004) と比べて乱数発生 of 効率性が下がることが予想される .

しかし、目的の切断多変量正規分布と同じ切断領域を持つ提案分布を簡単に構成し、その提案分布を用いた M-H アルゴリズム (Metropolis-Hastings Algorithm) によって乱数を発生させれば、先のギブスサンプラーでの欠点を補うことができる。つまり、(1) Metropolis within Gibbs として知られている方法によって他のサンプラーに埋め込むことが可能であり、その場合の繰り返し回数は 1 回で十分である。(2) 同時分布からの発生になっているため自由に変数変換を行うことができる。次節ではこの M-H アルゴリズムによる線形制約により切断された多変量正規分布からの乱数発生を行う新しい方法を説明する。

4.2 ブロックサンプラー

本節では、アルゴリズム 1 の Step 2-(b) において β の標本発生で用いられる、線形制約により切断された多変量正規分布からの乱数発生法について説明する。従来とは異なり、同時分布からの乱数発生を行うためブロックサンプラーと呼ぶことにする。

4.2.1 多変量標準正規分布の場合

線形制約により切断された多変量正規分布からの乱数発生法を説明する前に、多変量標準正規分布からの乱数発生法を説明する。具体的には以下のような分布に従う z の乱数を発生することを考える。

$$z \sim N_n(\mathbf{0}, I), \quad \text{subject to } \tilde{\mathbf{a}} \leq Lz \leq \tilde{\mathbf{b}}. \quad (28)$$

ここで $\tilde{\mathbf{a}}$ 及び $\tilde{\mathbf{b}}$ は $n \times 1$ の既知ベクトルであり、 L は $n \times n$ の下三角行列かつその対角成分は正であるとす。つまり、 L の第 (i, j) 要素を l_{ij} とすると、 $l_{ij} = 0$ ($i < j$) かつ $l_{ii} > 0$ 。

式 (28) に従う乱数は、以下の 4 ステップで発生させることができる。

アルゴリズム 2-1: ブロックサンプラー、多変量標準正規分布の場合

Step 1. 初期値 $z^{(0)}$ を $\tilde{\mathbf{a}} \leq z^{(0)} \leq \tilde{\mathbf{b}}$ を満たすように与え、 $m = 0$ とする。

Step 2. $z^{(m+1)}$ の候補 z^* を発生させる。

Step (a). z_1^* を以下の切断標準正規分布から発生させる。

$$z_1^* \sim N(0, 1), \quad \frac{\tilde{a}_1}{l_{11}} \leq z_1^* \leq \frac{\tilde{b}_1}{l_{11}}. \quad (29)$$

Step (b). z_i^* ($i = 2, \dots, n$) を以下の条件付き切断標準正規分布から発生させる。

$$z_i^* | z_1^*, \dots, z_{i-1}^* \sim N(0, 1), \quad \frac{\tilde{a}_i - \sum_{j < i} l_{ij} z_j^*}{l_{ii}} \leq z_i^* \leq \frac{\tilde{b}_i - \sum_{j < i} l_{ij} z_j^*}{l_{ii}}. \quad (30)$$

Step 3. Step 2 で得られた候補 z^* を確率 $\alpha(z^{(m)}, z^*)$ で $z^{(m+1)}$ として受容する。棄却した場合には、 $z^{(m+1)} = z^{(m)}$ とする。

Step 4. $m \rightarrow m + 1$ とし、Step 2 に戻る。

ここで確率 $\alpha(z^{(m)}, z^*)$ は、標準正規分布の累積分布関数 $\Phi(\cdot)$ を用いて、

$$\alpha(z^{(m)}, z^*) = \min \left\{ 1, \frac{w(z^*)}{w(z^{(m)})} \right\}, \quad (31)$$

$$w(z) = \left\{ \Phi \left(\frac{\tilde{b}_1}{l_{11}} \right) - \Phi \left(\frac{\tilde{a}_1}{l_{11}} \right) \right\} \left[\prod_{i=2}^{n-1} \left\{ \Phi \left(\frac{\tilde{b}_i - \sum_{j < i} l_{ij} z_j}{l_{ii}} \right) - \Phi \left(\frac{\tilde{a}_i - \sum_{j < i} l_{ij} z_j}{l_{ii}} \right) \right\} \right], \quad (32)$$

と表される。

上の M-H アルゴリズムで用いられている提案分布は, $n \times n$ 単位行列 I_n を用いて,

$$f(\mathbf{z}) = w(\mathbf{z})^{-1} \phi(\mathbf{z}, I_n) I(\mathbf{a} \leq \mathbf{Lz} \leq \mathbf{b}), \quad \text{ただし } \phi(\mathbf{z}, \Omega) = \{\det(2\pi\Omega)\}^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{z}'\Omega\mathbf{z}\right), \quad (33)$$

となっており, 逐次的に切断された多変量標準正規分布 (recursively truncated multivariate standard normal distribution) と呼ばれる. この逐次的に切断された多変量標準正規分布は GHK simulator で主に用いられる分布である. GHK simulator とは切断多変量正規分布に従う確率変数の関数の期待値を評価するための重点的サンプリングを用いた手法を指す. (GHK simulator 及び逐次的に切断された多変量正規分布については Hajivassiliou and Ruud (1994) の 3.2.2 節, Definition 4 を参照)

前節でも述べたが, 本アルゴリズムは Metropolis within Gibbs として知られている方法によって他のサンプラーに埋め込むことが可能であり, その場合は Step 2 と 3 を用いれば良い. また同時分布からの発生になっているため自由に変数変換を行うことができる. 例えば, 本アルゴリズムは次小節のような一般の多変量正規分布の場合にも応用することができる.

4.2.2 正方行列の場合

次のような分布に従う n 次元確率変数ベクトル \mathbf{x} の乱数を得ることを考える.

$$\mathbf{x} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma), \quad \mathbf{a} \leq \mathbf{Dx} \leq \mathbf{b}. \quad (34)$$

ここで $\boldsymbol{\mu}$, \mathbf{a} と \mathbf{b} は既知の $n \times 1$ ベクトル, Σ は既知の $n \times n$ 共分散行列, \mathbf{D} は既知の $n \times n$ の正則行列である. これは Geweke (1991) の方法が対象としている状況であり, 次小節に示す正方行列ではない場合の乱数発生法の基礎となる.

この様な状況での乱数発生はアルゴリズム 2-1 に変数変換のステップを加えればよく, 以下の 3 ステップで構成される.

アルゴリズム 2-2: ブロックサンプラー, \mathbf{D} が正方行列の場合

Step 1. 下三角行列 \mathbf{L} 及びベクトル $\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{a} - \mathbf{D}\boldsymbol{\mu}$, $\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b} - \mathbf{D}\boldsymbol{\mu}$ を求める. ここで, 下三角行列 \mathbf{L} は $\mathbf{L}\mathbf{L}' = \mathbf{D}\Sigma\mathbf{D}'$ を満たす下三角行列とする. (通常, 下三角行列 \mathbf{L} は $\mathbf{D}\Sigma\mathbf{D}'$ をコレスキー分解したものをを用いる.)

Step 2. アルゴリズム 2-1 を用いて \mathbf{z} を以下の切断多変量標準正規分布から発生させる.

$$\mathbf{z} \sim N_n(\mathbf{0}, \mathbf{I}), \quad \tilde{\mathbf{a}} \leq \mathbf{Lz} \leq \tilde{\mathbf{b}}. \quad (35)$$

Step 3. $\mathbf{x} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{Lz}$ と変換する.

このブロックサンプラーで発生させた \mathbf{x} が式 (34) に従うことは, 次の同値変形で示される.

$$\begin{aligned} \mathbf{z} \sim N_n(\mathbf{0}, \mathbf{I}), \quad \tilde{\mathbf{a}} \leq \mathbf{Lz} \leq \tilde{\mathbf{b}} &\iff \mathbf{D}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{Lz} \sim N_n(\mathbf{D}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{D}\Sigma\mathbf{D}'), \quad \mathbf{a} \leq \mathbf{D}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{Lz} \leq \mathbf{b} \\ &\iff \boldsymbol{\mu} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{Lz} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma), \quad \mathbf{a} \leq \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{Lz}) \leq \mathbf{b} \\ &\iff \mathbf{x} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma), \quad \mathbf{a} \leq \mathbf{Dx} \leq \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (36)$$

注釈 1. アルゴリズム 2-2 を他のサンプラーに埋め込む場合, Step 2 で用いるアルゴリズム 2-1 は初期化 (Step 1) 及びループ (Step 4) の為のステップを除いたもの (Step 2 と 3) でよい.

4.2.3 正方行列ではない場合

以上のアルゴリズム 2-1 及びアルゴリズム 2-2 では、やや制限された状況での多変量正規乱数の発生を考えた。しかし、アルゴリズム 1 の Step 2-(b) で用いるためには、より一般的な状況での多変量正規乱数の発生が必要である。本小節では、以下のような分布に従う n 次元確率変数ベクトル x の乱数を得ることを考える。

$$x \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}), \quad \mathbf{a} \leq \mathbf{D}x \leq \mathbf{b}. \quad (37)$$

ここで $\boldsymbol{\mu}$, \mathbf{a} と \mathbf{b} は既知の $n \times 1$ ベクトル, $\boldsymbol{\Sigma}$ は既知の $n \times n$ 共分散行列, \mathbf{D} は既知の $m \times n$ 行列であり, $m \geq n$ の時に限り $\text{rank}(\mathbf{D}) = n$ と仮定する。アルゴリズム 1 の Step 2-(b) で必要な状況は、上の状況に置いて $m > n$ の場合である。

乱数発生法の手順としては、(1) 線形制約式により切断された領域を多変量正規分布の次元に合わせた線形制約式で近似する。そうすれば、アルゴリズム 2-2 が適用可能となる。(2) アルゴリズム 2-2 を用いて乱数を発生させた後、その乱数を棄却サンプリングを利用して受容または棄却する。以上の手順を踏むことで、式 (37) に従う乱数を発生させることができる。

まず切断領域を近似するアルゴリズムを以下に示す。

アルゴリズム 2-A: 切断領域の近似

Step 1. $k = 1$.

Step 2. 拡大された制約式の組 $(\tilde{\mathbf{a}}^\dagger, \tilde{\mathbf{D}}^\dagger, \tilde{\mathbf{b}}^\dagger)$ を作る。

(a). $m \geq n$ の場合, $(\tilde{\mathbf{a}}^\dagger, \tilde{\mathbf{D}}^\dagger, \tilde{\mathbf{b}}^\dagger) = (\mathbf{a}, \mathbf{D}, \mathbf{b})$.

(b). $m < n$ の場合, 新しく n 本の制約式の組 $(\mathbf{a}^\dagger, \mathbf{D}^\dagger, \mathbf{b}^\dagger) = (-\infty \mathbf{1}_n, \mathbf{I}_n, \infty \mathbf{1}_n)$ を作り, それを $(\mathbf{a}, \mathbf{D}, \mathbf{b})$ に連結することで拡大された制約式の組を得る。

$$(\tilde{\mathbf{a}}^\dagger, \tilde{\mathbf{D}}^\dagger, \tilde{\mathbf{b}}^\dagger) = \left[\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{a}^\dagger \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{D}^\dagger \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^\dagger \end{pmatrix} \right]. \quad (38)$$

Step 3. 拡大された制約式から連続する n 本の制約式の組を選ぶ。

$$(\tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{D}}, \tilde{\mathbf{b}}) = \left[\begin{pmatrix} \tilde{a}_k^\dagger \\ \vdots \\ \tilde{a}_{k+n-1}^\dagger \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{d}_k^{\dagger'} \\ \vdots \\ \tilde{d}_{k+n-1}^{\dagger'} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{b}_k^\dagger \\ \vdots \\ \tilde{b}_{k+n-1}^\dagger \end{pmatrix} \right]. \quad (39)$$

Step 4. もし $\det(\tilde{\mathbf{D}}) = 0$ であれば $k \rightarrow k+1$ とし Step 1 に戻る。そうでなければ $(\tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{D}}, \tilde{\mathbf{b}})$ を返し終了。

ここで, $\mathbf{1}_n$ は全ての要素が 1 の $n \times 1$ ベクトル, $\tilde{a}_i^{\dagger'}$ は $\tilde{\mathbf{D}}^\dagger$ の第 i 行ベクトルを表す。

この近似は元の制約式の組 $(\mathbf{a}, \mathbf{D}, \mathbf{b})$ もしくは $(-\infty \mathbf{1}_n, \mathbf{I}_n, \infty \mathbf{1}_n)$ の連続した行ベクトルを, x の次元に応じて取り出すものとなっている。そのため, 得られた切断領域 $\{x \mid \tilde{\mathbf{a}} \leq \tilde{\mathbf{D}}x \leq \tilde{\mathbf{b}}\}$ は元の切断領域 $\{x \mid \mathbf{a} \leq \mathbf{D}x \leq \mathbf{b}\}$ を含んでいる。また以下の命題によって, このアルゴリズムは必ず有限回で終了することが保証されている。

命題 1. $m \times n$ 行列 \mathbf{D} ($m \geq n$) の階数が n である時またその時に限り \mathbf{D} から連続した n 本の一次独立な行ベクトルを取り出すことができる。

命題の証明は付論 A.2 を参照されたい。

切断領域を近似することができれば, 式 (37) に従う乱数発生ブロックサンプラーは以下の 3 ステップ

表 1: シミュレーション実験の設定

観測値数	100
パラメータの真の値	$(\beta_1, \beta_2, \delta_0, \delta_1, \sigma_u, \sigma_v) = (-0.6, 0.3, 0.1, 0.1, 0.3, 0.1)$
所得	$I_i \sim N(3, 0.3^2) ^*$
価格	$P_{i1} \sim N(2, 0.4^2) ^*$, $\Delta_i \sim N(0.7, 0.2^2) ^*$, $P_{i2} = P_{i1} + \Delta_i$
閾値	$\bar{Y}_{i1} = 2$
固定費用	$FC = 0$
選好の異質性の変数	$z_{i1} = 1$, $z_{i2} \sim N(2.5, 1)$

* $|N(\mu, \sigma^2)|$ は平均 μ , 分散 σ^2 の正規分布の絶対値を取ったもの.

で記述される.

アルゴリズム 2-3: ブロックサンプラー, D が正方行列ではない場合

Step 1. アルゴリズム 2-A を用いて近似された切断領域 $\{x \mid \tilde{a} \leq \tilde{D}x \leq \tilde{b}\}$ を得る.

Step 2. アルゴリズム 2-2 (アルゴリズム 2-1 に変数変換を加えたもの) によって,

$$\tilde{x} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}), \quad \tilde{a} \leq \tilde{D}\tilde{x} \leq \tilde{b}, \quad (40)$$

に従う標本を発生させる.

Step 3. もし $\tilde{a} \leq \tilde{D}\tilde{x} \leq \tilde{b}$ であれば, $x = \tilde{x}$ として終了. そうでなければ棄却して Step 2 に戻る.

アルゴリズム 2-A による切断領域の近似が悪い場合, 棄却サンプリングによる標本発生は受容率が低くなり, 効率が悪い. そのような場合はアルゴリズム 2-A の Step 1 で設定される k の初期値を変更して異なる制約式を選ぶようにすればよい.

注釈 2. 注釈 1 と同様, アルゴリズム 2-3 を他のサンプラーに埋め込む場合, Step 2 で用いるアルゴリズム 2-2 は初期化及びループの為のステップを除いたものでよい.

5 シミュレーション実験

本節では, 3.2 節で提案されたアルゴリズム 1 の Step 2-(b) にブロックサンプラー (アルゴリズム 2-3) を組み込み, その有効性をシミュレーション実験によって確かめる. 次節では日本の家庭用電力需要関数の推定を行うため, 電力の料金体系である逦増型ブロック料金制の場合のモデル, 式 (17) を用いる. また本節では Miyawaki et al. (2006) の GGS を用いた場合 (彼らの Algorithm 1.1 及び Algorithm 1.2) との比較も行う. そのため, 本節では彼らの論文の 4 節 と同設定, 同事前分布で実験を行う.

実験の設定は表 1 にある値もしくは分布からの乱数とした. また事前分布は,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta} \mid \sigma_u^2 &\sim N_2(\mathbf{0}, 100\sigma_u^2 \mathbf{I}), & \boldsymbol{\delta} \mid \sigma_v^2 &\sim N_2(\mathbf{0}, 100\sigma_v^2 \mathbf{I}), \\ \sigma_u^2 &\sim IG(0.01, 0.01), & \sigma_v^2 &\sim IG(0.01, 0.01), \end{aligned} \quad (41)$$

とした.

以上の設定の下, アルゴリズム 1 及びブロックサンプラーに従って MCMC 標本を発生させた. 最初の 3×10^4 個を稼働検査期間として棄てた後, 10^5 個の標本を発生させ, その全ての標本を用いた推定結果を図 2 及び表 2 にまとめた. 図 2 は各パラメータの周辺事後分布を描いたもので, 表 2 は事後分布を用いた推論を行うための統計量をまとめている. 表 2 の各列は, それぞれ事後標本平均, 事後標本標準誤差, 95% 信用区間, 非効率性因子, 収束判定のための仮説検定の p -値を表している. 非効率性因子の列には, Miyawaki

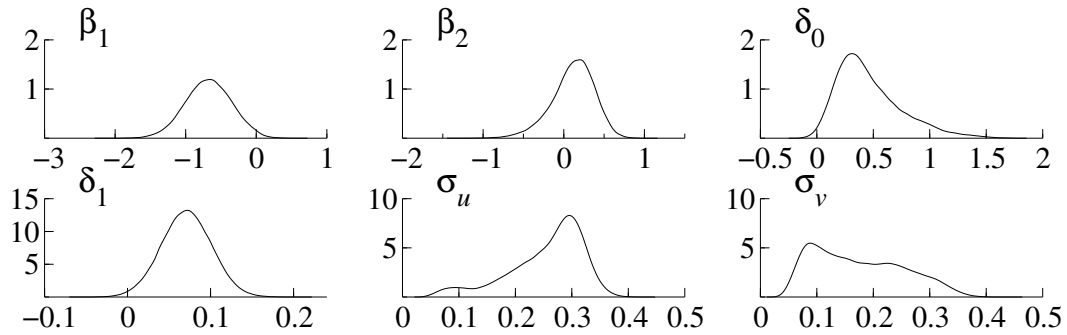


図 2: 周辺事後分布 (シミュレーション実験).

表 2: シミュレーション実験による推定結果

パラメータ	真の値	平均	標準偏差	95% 信用区間	非効率性因子*	CD**
β_1	-.6	-.68	.33	[-1.33 - .042]	117 [345]	.368
β_2	.3	.11	.27	[- .49 .57]	651 [731]	.810
δ_0 (constant)	.1	.47	.29	[- .053 1.18]	1489 [1034]	.706
δ_1	.1	.071	.030	[.012 .13]	14 [25]	.097
σ_u (measurement error)	.3	.26	.066	[.085 .35]	168 [152]	.945
σ_v (heterogeneity)	.1	.17	.080	[.059 .33]	159 [144]	.713

* 角括弧内の値は, Miyawaki et al. (2006) の Table 1 の下段で報告されている GGS の場合の非効率性因子 .

** CD は収束判定のための仮説検定の p -値を意味する .

et al. (2006) との比較のために, 彼らの論文の Table 1 の下段に報告されているものを角括弧内に併記してある .

非効率性因子とは得られた MCMC 標本の効率性を評価する指標であって $1 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \rho(j)$ として計算される . ここで $\rho(j)$ はラグ j の標本自己相関である . 非効率性因子は得られた標本の分散と仮想的な独立標本の分散の比として解釈できるため, 独立標本が得られた場合と比較した MCMC 標本の効率性を評価することができる . (より詳しい議論は Chib 2001 の 3.2 節を参照) 一方 CD (convergence diagnostics) とは Geweke (1992) により提案された収束判定のための仮説検定の p -値であり, 最初の n_1 個と最後の n_2 個の標本を取り出し, 両者の平均が一致しているかを検定するものである . 今回は, Geweke (1992) で推奨されている最初の 10% と最後の 50% の標本をそれぞれ n_1, n_2 として計算を行った .

まず各パラメータの周辺事後分布がそれぞれ真の値をモード付近に含むように分布していることから, アルゴリズム 1 及びブロックサンプラーはうまく機能しているといえる . また Miyawaki et al. (2006) の Table 1 の下段の結果と比較しても事後標本平均及び事後標本標準誤差はほぼ同じであった . ただし β_1 と β_2 の 95% 信用区間がやや広くなっていた . これはこの後に示す (β_1, β_2) の等高線プロットからも見て取れる . (図 3 参照) 一方非効率性因子は彼らの結果と比べて改善を示しており, とりわけ β_1 の非効率性因子が大きく減少していることが分かった . しかし β_2 の標本の事後分布への収束は依然遅く, 改善の余地があるといえる .

続いてブロックサンプラーの評価を行う . その棄却サンプリングのステップ (アルゴリズム 2-3 の Step 3) において, 本実験の受容率は約 6% であった . この比率から切断領域の近似が非常に悪いことが推測され, 制約式の並び替え等で近似を良くする方法も考えられる . しかし本実験では切断に用いられる線形制約式が選好の異質性に起因するものが 100 本と分離条件に起因するものが 100 本の合計 200 本ある . そのためアルゴリズム 2-A より優れた近似領域を構成する線形制約式を探索することは計算負荷の観点から非常に

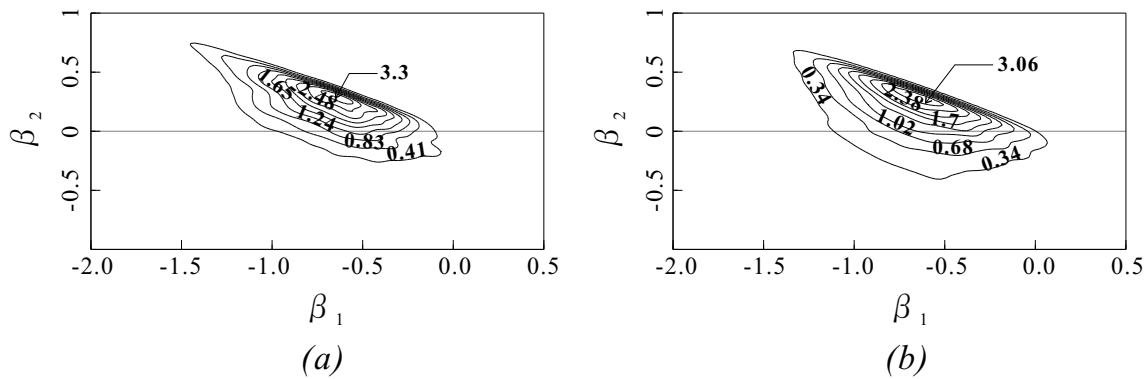


図 3: 等高線図 (β_1, β_2) : (a) Miyawaki et al. (2006) の GGS を用いた方法, (b) 本論文の方法.

表 3: 日本の電気事業者 (2006 年)

事業者名	事業者数	発電設備と送電網の保有状況	対象需要家
一般電気事業者	10	送発電設備共に保有	} 全ての需要家 } 高圧需要家
卸電気事業者等	50	発電設備のみ保有, 一般電気事業者への卸売	
特定電気事業者	6	送発電設備共に保有	
特定規模電気事業者	23	発電設備のみ保有, 一般電気事業者の送電網で託送	

難しい. 一方, 近年疑似乱数の周期が非常に長くなったことから, 多くの乱数を必要とすることはあまり問題ではないと考えられる. よって受容率の低さはそれほど問題ではないと考えられる.

最後に (β_1, β_2) の標本を用いて等高線プロットを描いた. 図 3 は Miyawaki et al. (2006) の方法と本論文の方法で得られた等高線プロットである. いずれの方法も似通った等高線プロットとなっており, とりわけ北東方向が急な斜面になっていることが共通している. ただし本論文の方法で発生させた標本の等高線プロットがやや南西方向に膨らんでおり, その結果 β_1 と β_2 の 95% 信用区間がやや広がったことが分かる.

6 日本の家庭用電力需要関数の推定

6.1 日本の電気事業及びデータの説明

まず日本の電気事業について簡単に説明する. 電気事業は発電部門と送電部門に分かれるが, 従来, 共に 10 社の一般電気事業者による地域独占供給が行われていた. 独占供給を行う理由は規模の経済性である. しかし, 1995 年, 1999 年及び 2003 年の 3 度に渡る電気事業制度改革により地域独占が崩れ一部自由化が導入された. 具体的には高圧需要家 (電圧 6000V 以上かつ契約電力 50kW 以上の需要家) に対する電力供給が自由化された. 2006 年時点での事業者の概要は表 3 にまとめられている.

一方, 本論文で分析対象とする家庭用電力は用途別では電灯と呼ばれる需要であり, 先の自由化の対象外となっている. そのため家庭用電力に関しては, 従来同様地域独占であり規制料金での供給が行われている. その料金体系は主に逦増型ブロック料金制が採用されている. 逦増型ブロック料金制の採用理由としては, エネルギー問題の観点からの理由があげられる. つまり, より多い需要量に対してより高い料金を設定することで電気を節約するインセンティブを持たせる目的があると考えられている.

続いて電力需要関数の推定を行う 1999 年のデータについて説明する. これらのデータは Miyawaki et al. (2006) の 7 節で電力需要関数の推定に用いられたものと同じである. 用いるデータは都道府県ごとに集計されたデータであり, 被説明変数及び説明変数は以下の通り. 被説明変数は総務省「家計調査年報」で報告

表 4: 電力需要関数の推定に用いられる説明変数

変数名	対応する係数	変数の説明 (単位)
価格	β_1	従量電灯 B, 30A の価格 (10^3 円/kWh)
固定費用		基本料金 (10^3 円)
所得		消費支出 (10^3 円)
w_i^* の説明変数	δ_1	平均世帯人数 (人)
	δ_2	平均気温 ($^{\circ}\text{C}$)

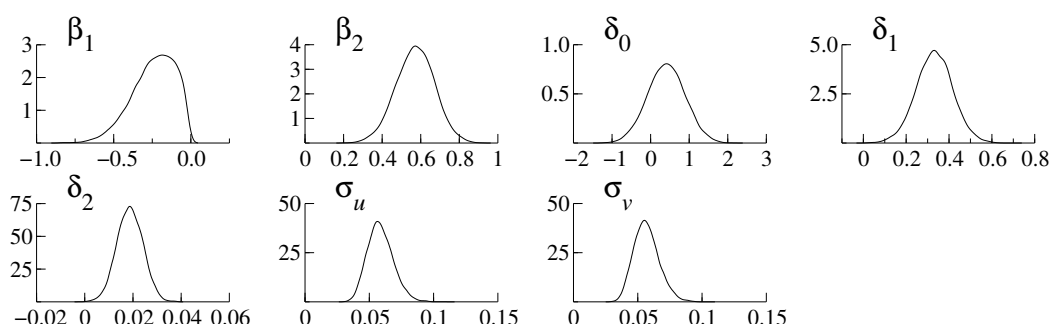


図 4: 周辺事後分布 (電力).

されている一家計が一月に平均的に使用する電気料金を後述の対応する料金表により量 (m^3) に変換したものをを用いる。

また説明変数は表 4 にまとめられているものを用いる。まず、価格として従量電灯 B という料金区分のうち契約容量 30 アンペア (A) の料金表を使用し、固定費用としてその料金表の基本料金を使用する。先ほど述べた通り、料金体系は通増型ブロック料金制となっており、そのブロック数は各電力会社により異なり 3-4 ブロックであった。所得には「家計調査年報」の消費支出を用い、選好の異質性の説明変数には「家計調査年報」より平均世帯人数及び気象庁発表の平均気温を用いる。

6.2 日本の家庭用電力需要関数の推定

シミュレーション実験同様に式 (17) のモデルを用い、アルゴリズム 1 及びブロックサンプラー (アルゴリズム 2-3) によって事後分布からの標本を発生させ推定を行った。事前分布は、シミュレーション実験と同様、

$$\begin{aligned} \beta \mid \sigma_u^2 &\sim N_2(\mathbf{0}, 100\sigma_u^2 \mathbf{I}), & \delta \mid \sigma_v^2 &\sim N_2(\mathbf{0}, 100\sigma_v^2 \mathbf{I}), \\ \sigma_u^2 &\sim IG(0.01, 0.01), & \sigma_v^2 &\sim IG(0.01, 0.01), \end{aligned} \quad (42)$$

とした。MCMC 標本をアルゴリズム 1 及びブロックサンプラーに従って発生させ、最初の 4×10^5 個を稼働検査期間として棄てた後の 10^6 個の標本を得た。得られた 10^6 標本を 100 個置きに拾い 10^4 標本に減らした結果が図 4 及び表 5 にまとめられている。

推定結果は、非効率性因子を除いて Miyawaki et al. (2006) の Table 11 と同様な結果になっている。つまり、電力需要の価格弾力性は $\Pr(\beta_1 < 0) > .95$ より 95% 以上の事後確率で負と推定され、所得弾力性は $\Pr(\beta_2 > 0) > .95$ より同様に正と推定された。事後標本平均の絶対値で見れば、所得の方が電力需要に与え

表 5: 日本の家庭用電力需要関数 (1999) の推定結果

パラメータ	平均	標準偏差	95% 信用区間	非効率性因子*	CD**
β_1 (price)	-.24	.14	[-.55 - .034]	29.82 [70.50]	.585
β_2 (income)	.57	.10	[.37 .77]	63.09 [69.68]	.565
δ_0 (constant)	.41	.48	[-.55 1.37]	137.50 [64.55]	.716
δ_1 (num. of members)	.33	.086	[.16 .50]	40.28 [17.99]	.222
δ_2 (temperature)	.019	.005	[.008 .029]	1.65 [4.56]	.465
σ_u (measurement error)	.059	.010	[.041 .080]	7.33 [3.12]	.910
σ_v (heterogeneity)	.057	.010	[.040 .078]	4.03 [2.98]	.057

* 角括弧内の値は、Miyawaki et al. (2006) の Table 11 で報告されている非効率性因子。

** CD は収束判定のための仮説検定の p -値を意味する。

る影響がやや大きいことが分かる。非効率性因子に関しては、とりわけ β の非効率性因子がブロックサンプラーを用いたことにより改善している。しかしその改善の程度は β_2 より β_1 の方が大きく、非対称的な改善となった。この傾向はシミュレーション実験の結果でも見られており、今後の改善が期待される。

7 おわりに

本論文では、離散連続選択アプローチを用いた非線形料金体系下の需要関数の推定方法の紹介と共に、従来より効率的なマルコフ連鎖モンテカルロ法による推定手法を提案した。また、その新しい推定手法の効率性をシミュレーション実験により確かめると共に、日本の家庭用電力需要関数の分析を行った。

今後の課題として以下の2点をあげる。まず一つ目は非線形料金体系下の需要関数の拡張である。応用上重要な拡張としては(1)多変量の場合と(2)供給関数を含む場合があげられる。前者はエネルギー需要関数の推定を目的としている。例えば電気とガスにはある程度の代替関係が存在し、それを無視した推定は望ましくない。実際エネルギー資源間の代替関係を分析した先行研究(例えば Baker, Blundell and Micklewright 1989 参照)は行われている。しかし先行研究では非線形料金体系の問題を無視したものとなっている。そのため本論文のモデルを多変量の場合に拡張することは意味があると考ええる。また、後者は自由化された規制産業の分析に重要である。非線形料金で供給されている財の多くは規制産業で観察されるため、供給関数を捨象して分析することが可能であった。しかし電気通信の分野や自由化された電力産業(高圧需要家部分)では自由化が進んだため、供給側の競争を考慮して分析する必要がある。そのための枠組みとして、例えば不均衡モデル(Kunitomo and Sato 1996 等を参照)があげられる。

今後の課題の二点目は β_1 と β_2 の非対称な非効率性因子の原因の解明である。確かに本論文で提案するブロックサンプラーによって β の非効率性因子は大きく改善した。しかしその程度は β_1 と β_2 によって非対称な改善となっていた。この非対称性の原因を解明すると同時により効率的な推定手法の提案は今後の課題である。

謝辞

本研究は日本学術振興会特別研究員制度より助成を受けています。

A 補論

A.1 条件付き事後分布

本節では、アルゴリズム 1 で用いられる条件付き事後分布を各ステップに従って説明する。逓増型、逓減型のブロック料金制に関わらず同一の条件付き事後分布を導出するために、料金制によって異なる集合 $(\mathcal{A}, R_{\beta,i})$ 及び多項分布のパラメータ $(m_{is}, \theta_{is}, \tau_s^2)$ を定義しておく。¹

逓増型の場合:

$$\mathcal{A} = \{i \mid s_i^* = 2k - 1\}, \quad (43)$$

$$R_{\beta,i} = \begin{cases} \{\beta \mid \mathbf{x}'_{ik}\beta < \bar{y}_{ik} - w_i^*, \mathbf{x}'_{ik}\beta > \bar{y}_{i,k-1} - w_i^*\}, & \text{if } s_i^* = 2k - 1, \\ \{\beta \mid \mathbf{x}'_{i,k+1}\beta \leq \bar{y}_{ik} - w_i^*, \mathbf{x}'_{ik}\beta \geq \bar{y}_{ik} - w_i^*\}, & \text{if } s_i^* = 2k, \end{cases} \quad (44)$$

$$(m_{is}, \theta_{is}, \tau_s^2) = \begin{cases} \left(\frac{\sigma_u^{-2}\sigma_v^{-2}(y_i - y_{ik} - \mathbf{z}'_i\boldsymbol{\delta})^2}{\sigma_u^{-2} + \sigma_v^{-2}}, \frac{\sigma_u^{-2}(y_i - y_{ik}) + \sigma_v^{-2}\mathbf{z}'_i\boldsymbol{\delta}}{\sigma_u^{-2} + \sigma_v^{-2}}, \{\sigma_u^{-2} + \sigma_v^{-2}\}^{-1} \right), & \text{if } s = 2k - 1, \\ \left(\sigma_u^{-2}(y_i - \bar{y}_{ik})^2, \mathbf{z}'_i\boldsymbol{\delta}, \sigma_v^2 \right), & \text{if } s = 2k. \end{cases} \quad (45)$$

逓減型の場合:

$$\mathcal{A} = \{i \mid i = 1, \dots, n\}, \quad (46)$$

$$R_{\beta,i} = \{\beta \mid \bar{y}_{k-1} - w_i^* < \mathbf{x}'_{ik}\beta < \bar{y}_k - w_i^*, \mathbf{x}'_{ik}\beta > h_j - w_i^* (j < k), \mathbf{x}'_{ik}\beta < h_j - w_i^* (j > k)\}, \quad (47)$$

$$(m_{is}, \theta_{is}, \tau_s^2) = \left(\frac{\sigma_u^{-2}\sigma_v^{-2}(y_i - y_{is} - \mathbf{z}'_i\boldsymbol{\delta})^2}{\sigma_u^{-2} + \sigma_v^{-2}}, \frac{\sigma_u^{-2}(y_i - y_{is}) + \sigma_v^{-2}\mathbf{z}'_i\boldsymbol{\delta}}{\sigma_u^{-2} + \sigma_v^{-2}}, (\sigma_u^{-2} + \sigma_v^{-2})^{-1} \right). \quad (48)$$

A.1.1 Step 2. (σ_u^2, β) を s^*, w^* を所与として発生させる。

β を積分消去すれば、 σ_u^2 の条件付き事後分布は逆ガンマ分布 $IG(\frac{n_{u,1}}{2}, \frac{S_{u,1}}{2})$ となる。ただし、 $n_{u,1} = n_{u,0} + n$,

$$S_{u,1} = S_{u,0} + \boldsymbol{\mu}'_{\beta,0}\boldsymbol{\Sigma}_{\beta,0}^{-1}\boldsymbol{\mu}_{\beta,0} + \sum_{i \in \mathcal{A}} (y_i - w_i^*)^2 + \sum_{i \notin \mathcal{A}} (y_i - \bar{y}_{ik})^2 - \boldsymbol{\mu}'_{\beta,1}\boldsymbol{\Sigma}_{\beta,1}^{-1}\boldsymbol{\mu}_{\beta,1}. \quad (49)$$

この逆ガンマ分布で得られた σ_u^2 の標本を所与とすれば、 β の条件付き事後分布は、線形制約 $\beta \in R_{\beta}$ で切断された多変量正規分布 $N_2(\boldsymbol{\mu}_{\beta,1}, \boldsymbol{\Sigma}_{\beta,1}^2)$ となる。ただし切断領域、平均及び分散は以下の通り。

$$R_{\beta} = \bigcap_{i=1}^n \{R_{\beta,i} \cap SR_i\}, \quad \boldsymbol{\mu}_{\beta,1} = \boldsymbol{\Sigma}_{\beta,1} \left(\boldsymbol{\Sigma}_{\beta,0}^{-1}\boldsymbol{\mu}_{\beta,0} + \sum_{i \in \mathcal{A}} (y_i - w_i^*)\mathbf{x}_{ik} \right), \quad \boldsymbol{\Sigma}_{\beta,1}^{-1} = \boldsymbol{\Sigma}_{\beta,0}^{-1} + \sum_{i \in \mathcal{A}} \mathbf{x}_{ik}\mathbf{x}'_{ik}. \quad (50)$$

A.1.2 Step 3. $(\sigma_v^2, \boldsymbol{\delta})$ を w^* を所与として発生させる。

$\boldsymbol{\delta}$ を積分消去すれば、 σ_v^2 の条件付き事後分布は逆ガンマ分布 $IG(\frac{n_{v,1}}{2}, \frac{S_{v,1}}{2})$ となる。ただし、 $n_{v,1} = n_{v,0} + n$,

$$S_{v,1} = S_{v,0} + \boldsymbol{\mu}'_{\boldsymbol{\delta},0}\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\delta},0}^{-1}\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\delta},0} + \mathbf{w}^*\mathbf{w}^* - \boldsymbol{\mu}'_{\boldsymbol{\delta},1}\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\delta},1}^{-1}\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\delta},1}. \quad (51)$$

この逆ガンマ分布で得られた σ_v^2 の標本を所与とすれば、 $\boldsymbol{\delta}$ の条件付き事後分布は多変量正規分布 $N_d(\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\delta},1}, \sigma_v^2\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\delta},1})$ となる。ここで

$$\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\delta},1} = \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\delta},1} \left(\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\delta},0}^{-1}\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\delta},0} + \mathbf{Z}'\mathbf{w}^* \right), \quad \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\delta},1}^{-1} = \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\delta},0}^{-1} + \sum_{i=1}^n \mathbf{Z}'\mathbf{Z}. \quad (52)$$

¹ただし逓減型の場合、 τ_s^2 は s に依存しないが記法の統一のために τ_s^2 としている。

A.1.3 Step 4. (s_i^*, w_i^*) を $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\delta}, \sigma_u^2, \sigma_v^2$ ($i = 1, \dots, n$) を所与として発生させる。

選好の異質性 w_i^* を積分消去すれば、潜在需要 y_i^* の状態を表す s_i^* の条件付き事後分布は多項分布に従い、

$$Pr(s_i^* = s \mid \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\delta}, \sigma_u^2, \sigma_v^2) \propto \tau_s [\Phi\{\tau_s^{-1}(RU_{is} - \theta_{is})\} - \Phi\{\tau_s^{-1}(RL_{is} - \theta_{is})\}] \exp\left(-\frac{m_{is}}{2}\right). \quad (53)$$

ただし、 (RL_{ik}, RU_{ik}) は選好の異質性の区間 R_{ik} の下限、上限をそれぞれ表す。

この多項分布で得られた $s_i^* = s$ を所与とすれば、 w_i^* の条件付き事後分布は、領域 R_{is} で切断された正規分布 $N(\theta_{is}, \tau_s^2)$ となる。

A.2 命題 1 の証明

(\Leftarrow) 階数の定義と $\text{rank}(\mathbf{D}) \leq n$ より明らか。

(\Rightarrow) 対偶を示すことで証明する。対偶は、「 \mathbf{D} から取り出すことのできる全ての連続した n 本の行ベクトルが一次従属であれば、 $\text{rank}(\mathbf{D}) < n$ 」である。ここで \mathbf{D} の第 i 行ベクトルの転置を \mathbf{d}_i ($m \times 1$) とする。つまり $\mathbf{D} = (\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_m)'$ 。

まず、最初の n 本の行ベクトルが一次従属であること及び 2 番目から $n+1$ 番目までの行ベクトルが一次従属であることから、以下の関係式が成立する。

$$\mathbf{d}_1 = [\mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_n] \mathbf{c}_1, \quad \mathbf{d}_{n+1} = [\mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_n] \mathbf{c}_{n+1}. \quad (54)$$

ただし、 \mathbf{c}_i ($i = 1, \dots, m$) は少なくとも一つの要素が 0 でない $n-1 \times 1$ ベクトルを表す。よって、 \mathbf{D} の最初の $n+1$ 行を取り出した行列 $(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{n+1})'$ の階数は $n-1$ 以下となる。

続いて、 \mathbf{D} の最初の $n+2$ 行を取り出した行列 $(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{n+2})'$ の階数を考える。まず最初の n 本の行ベクトル及び 2 番目から $n+1$ 番目までの行ベクトルがそれぞれ一次従属であるため、

$$\mathbf{d}_1 = [\mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_n] \mathbf{c}_1, \quad \mathbf{d}_2 = [\mathbf{d}_3, \dots, \mathbf{d}_{n+1}] \mathbf{c}_2 \implies \mathbf{d}_1 = [(\mathbf{d}_3, \dots, \mathbf{d}_{n+1}) \mathbf{c}_2, \mathbf{d}_3, \dots, \mathbf{d}_n] \mathbf{c}_1 \equiv [\mathbf{d}_3, \dots, \mathbf{d}_{n+1}] \tilde{\mathbf{c}}_1, \quad (55)$$

となっている。よって、

$$\mathbf{d}_1 = [\mathbf{d}_3, \dots, \mathbf{d}_{n+1}] \tilde{\mathbf{c}}_1, \quad \mathbf{d}_2 = [\mathbf{d}_3, \dots, \mathbf{d}_{n+1}] \mathbf{c}_2, \quad \mathbf{d}_{n+2} = [\mathbf{d}_3, \dots, \mathbf{d}_{n+1}] \mathbf{c}_{n+2}, \quad (56)$$

より、行列 $(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{n+2})'$ の階数は $n-1$ 以下であることが分かる。

同様に考えれば、行列 $(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{n+i})'$ ($i = 3, \dots, m-n$) の階数はいずれも $n-1$ 以下であることを示せる。よって、 $i = m-n$ の場合から $\text{rank}(\mathbf{D}) \leq n-1 < n$ 。□

参考文献

Amemiya, Takeshi (1985) *Advanced Econometrics*, Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

Averett, Susan L. and Julie L. Hotchkiss (1997) "Female Labor Supply with a Discontinuous, Nonconvex Budget Constraint: Incorporation of a Part-Time/Full-Time Wage Differential," *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 79, No. 3, pp. 461–470.

Baker, Paul, Richard Blundell, and John Micklewright (1989) "Modelling Household Energy Expenditures Using Micro Data," *The Economic Journal*, Vol. 99, pp. 720–738.

Burtless, Gary and Jerry A. Hausman (1978) "The Effect of Taxation on Labor Supply: Evaluating the Gary Negative Income Tax Experiment," *Journal of Political Economy*, Vol. 86, No. 6, pp. 1103–1130.

- Chib, Siddhartha (2001) "Markov Chain Monte Carlo Methods: Computation and Inference," in J. J. Heckman and E. Leamer eds. *Handbook of Econometrics*, Vol. 5, Amsterdam: North-Holland, Chap. 57, pp. 3569–3649.
- Geweke, John (1991) "Efficient Simulation from the Multivariate Normal and Student-t Distributions Subject to Linear Constraints and the Evaluation of Constraint Probabilities," in E. M. Keramidas ed. *Computing Science and Statistics: Proceedings of the 23rd Symposium on the Interface*, pp. 571–578, Fairfax, VA: Interface Foundation of North America.
- (1992) "Evaluating the Accuracy of Sampling-based Approaches to the Calculation of Posterior Moments," in J. M. Bernardo, J. O. Berger, A. P. Dawid, and A. F. M. Smith eds. *Bayesian Statistics 4*, Oxford: Oxford University Press, pp. 169–193.
- Hajivassiliou, Vassilis A. and Paul A. Ruud (1994) "Classical Estimation Methods for LDV Models Using Simulation," in Robert F. Engle and Daniel L. McFadden eds. *Handbook of Econometrics*, Vol. 4, Oxford: North Holland, Chap. 40, pp. 2383–2441.
- Hanemann, W. Michael (1984) "Discrete/Continuous Models of Consumer Demand," *Econometrica*, Vol. 52, No. 3, pp. 541–562.
- Hausman, Jerry A. (1985) "The Econometrics of Nonlinear Budget Sets," *Econometrica*, Vol. 53, No. 6, pp. 1255–1282.
- de Jong, G. C. (1990) "An Indirect Utility Model of Car Ownership and Private Car Use," *European Economic Review*, No. 34, pp. 971–985.
- Kunitomo, Naoto and Seisho Sato (1996) "Asymmetry in Economic Time Series and the Simultaneous Switching Autoregressive Model," *Structural Change and Economic Dynamics*, Vol. 7, pp. 1–34.
- Miyawaki, Koji and Yasuhiro Omori (2007) "Duality-Based Analysis of Residential Gas Demand under Decreasing Block Rate Pricing." University of Tokyo CIRJE Discussion Paper Series CIRJE-F-506.
- Miyawaki, Koji, Yasuhiro Omori, and Akira Hibiki (2006) "Bayesian Estimation of Demand Functions under Block Rate Pricing." University of Tokyo CIRJE Discussion Paper Series CIRJE-F-424.
- Moffitt, Robert (1986) "The Econometrics of Piecewise-Linear Budget Constraint," *Journal of Business and Economic Statistics*, Vol. 4, No. 3, pp. 317–328.
- Olmstead, Sheila M., W. Michael Hanemann, and Robert N. Stavins (2007) "Water Demand under Alternative Price Structures," *Journal of Environmental Economics and Management*. forthcoming.
- Reiss, Peter C. and Matthew W. White (2005) "Household Electricity Demand, Revisited," *Review of Economic Studies*, Vol. 72, pp. 853–883.
- Rodriguez-Yam, Gabriel, Richard A. Davis, and Louis L. Scharf (2004) "Efficient Gibbs Sampling of Truncated Multivariate Normal with Application to Constrained Linear Regression."